

§ 12. Тэарэма сінусаў

Вы ўжо ведаеце, што ў трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал, а супраць большага вугла — большая старана. Няхай a, b, c — стараны, α, β, γ — прылеглыя да іх вуглы трохвугольніка ABC адпаведна (рыс. 151). Калі старана a — большая, b — сярэдняя, c — меншая, то вугал α — большы, β — сярэдні, γ — меншы. Устаноўім дакладную сувязь паміж даўжынёй стараны трохвугольніка і велічынёй процілеглага ёй вугла.

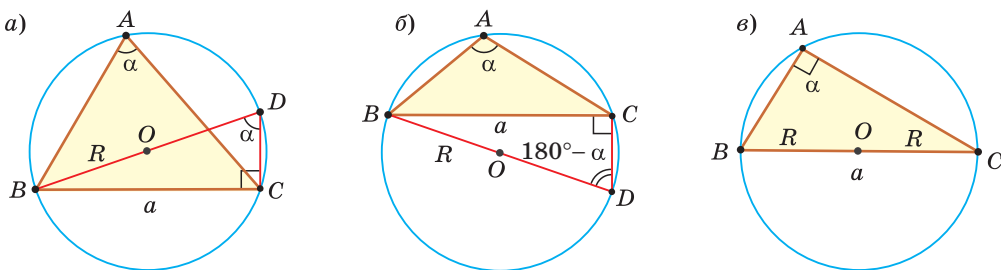


Рыс. 151

Тэарэма сінусаў. Стараны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, г. зн.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC , $BC = a$, $\angle A = \alpha$, R — радыус яго апісанай акружнасці. Вугал α можа быць вострым, тупым або прамым. Разгледзім гэтыя выпадкі асобна.



Рыс. 152

1) Вугал α востры (рыс. 152, а). Правёўшы дыяметр BD і адрэзак DC , атрымаем прамавугольны трохвугольнік BCD , у якім $\angle BCD = 90^\circ$ як упісаны вугал, які абаяраецца на дыяметр. Заўважым, што $\angle D = \angle A = \alpha$ як упісаныя вуглы, якія абаяраюцца на адну і тую ж дугу BC . З прамавугольнага трохвугольніка BCD знаходзім $\sin D = \frac{BC}{BD}$, г. зн. $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

2) Вугал α тупы (рыс. 152, б). Правядзём дыяметр BD і адрэзак DC . У чатырохвугольніку $ABDC$ па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка $\angle D = 180^\circ - \alpha$. З прамавугольнага трохвугольніка BCD ($\angle BCD = 90^\circ$ як упісаны вугал, які абаяраецца на дыяметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a}{2R}$. Паколькі $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справядлівасць роўнасці $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ дакажыце самастойна.

З прычыны даказанага $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, адкуль $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма сінусаў дае магчымасць рашаць шырокае кола задач.

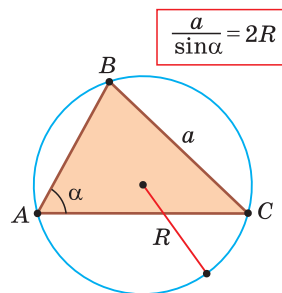
Так, прапорцыя $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ дазваляе рашыць *дзве* наступныя задачы:

- ведаючы дзве стараны трохвугольніка і вугал, процілеглы адной з іх, знайсці сінус вугла, процілеглага другой старане;
- ведаючы два вуглы трохвугольніка і старану, процілеглую аднаму з гэтых вуглоў, знайсці старану, процілеглую другому вуглу.

Пры дапамозе формулы $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ можна ра-

шыць яшчэ *тры* задачы (рыс. 153):

- ведаючы старану трохвугольніка і процілеглы ёй вугал, знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка;
- ведаючы вугал трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці, знайсці старану трохвугольніка, процілеглую дадзенаму вуглу;
- ведаючы старану трохвугольніка і радыус яго апісанай акружнасці, знайсці сінус вугла, процілеглага дадзенай старане.

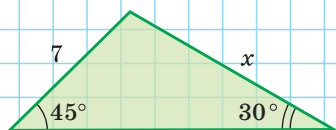


Рыс. 153

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

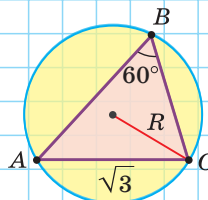
Тэст 1

Знайдзіце старану x трохвугольніка на рысунку, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў: $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.



Тэст 2

Знайдзіце велічыню радыуса R на рысунку, выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.



Паўтарэнне

1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$

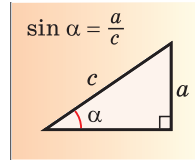
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$

2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$

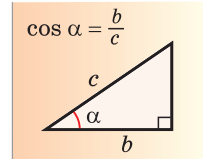
$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

3) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$

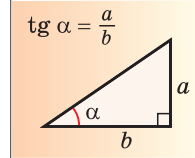
4) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$



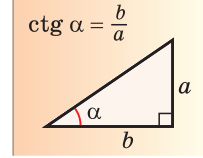
$\sin \alpha = \frac{a}{c}$



$\cos \alpha = \frac{b}{c}$



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$



$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$

**Заданні да § 12****РАШАЕМ РАЗАМ****ключавыя задачы**

Задача 1. У востравугольным трохвугольніку вядомы стораны $a = 8$, $b = 9$ і вугал $\alpha = 60^\circ$. Знайсці два другія вуглы β і γ , акругліўшы іх значэнні да 1° , і трэцюю старану трохвугольніка, акругліўшы яе даўжыню да $0,1$.

Рашэнне. Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, адкуль $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$,

$$\sin \beta = \frac{9 \cdot \sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9 \cdot 0,8660}{8} \approx 0,9743. \text{ Пры дапамозе калькулятара (табліц)}$$

знаходзім $\beta \approx 77^\circ$. Тады $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. Па тэарэме сінусаў

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ адкуль } \frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}, \quad c = \frac{8 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8 \cdot \frac{0,6820}{0,8660} \approx 6,3.$$

Адказ: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6,3$.

Заўвага. Калі б па ўмове трохвугольнік быў тупавугольным з тупым вуглом β , то, ведаючы $\sin \beta \approx 0,9743$, спачатку мы знайшлі б востры вугал $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затым, выкарыстаўшы формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, атрымалі б, што $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

Задача 2. Даказаць справядлівасць формулы плошчы трохвугольніка

$$S = \frac{abc}{4R}, \text{ дзе } a, b, c \text{ — яго стораны, } R \text{ — радыус апісанай акружнасці.}$$

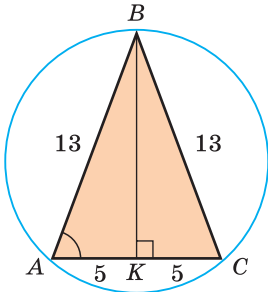
Доказ. Выкарыстаем вядомую формулу плошчы трохвугольніка:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \text{ Па тэарэме сінусаў } \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ адкуль } \sin \gamma = \frac{c}{2R}. \text{ Тады}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}. \text{ Што і трэба было даказаць.}$$

Заўвага. Выведзеная формула дазваляе знайсці радыус апісанай акружнасці трохвугольніка: $R = \frac{abc}{4S}$.

Задача 3. Знайсці радыус R акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай $AC = 10$ і бакавой старонай $BC = 13$ (рыс. 154).



Рыс. 154

Рашэнне. *Спосаб 1.* З формулы $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ вынікае, што $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Знойдзем $\sin A$. Для гэтага ў трохвугольніку ABC правядзём вышыню BK , якая будзе і медыянай, адкуль $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. З $\triangle ABK$ па тэарэме Піфагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, адкуль $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{12}{13}$.

Тады $2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{13}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{12}$, $R = \frac{169}{2 \cdot 12} = 7 \frac{1}{24}$.

Спосаб 2. Выкарыстаем формулу $S = \frac{abc}{4R}$, з якой $R = \frac{abc}{4S}$. Паколькі

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, то $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} = 7 \frac{1}{24}$.

Адказ: $7 \frac{1}{24}$.

Заўвага.* Напомнім, што ў главе II мы знайшлі радыус R апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка, правёўшы пасярэднія перпендыкуляры да яго старон і выкарыстаўшы падобнасць атрыманых прамавугольных трохвугольнікаў. Таксама мы маглі карыстацца формулай $R = \frac{b^2}{2h_a}$, дзе b — бакавая старана, h_a — вышыня, праведзеная да асновы a . Замяніўшы S у формуле $R = \frac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, атрымаем $R = \frac{ab}{2h_c}$ — формулу радыуса апісанай акружнасці для адвольнага трохвугольніка. Такім чынам, мы маем чатыры формулы для знаходжання радыуса R апісанай акружнасці трохвугольніка:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

$$R = \frac{abc}{4S},$$

$$R = \frac{ab}{2h_c},$$

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Адвольны трохвугольнік

Раўнабедраны трохвугольнік

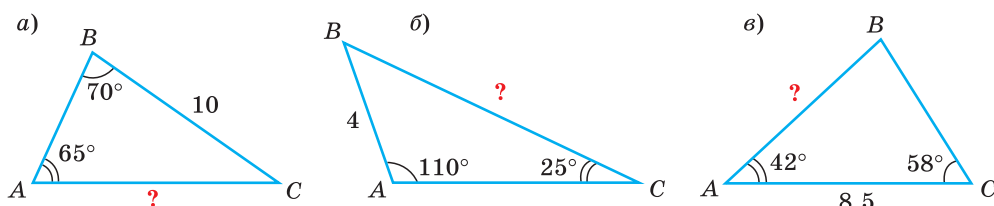


РАШАЕМ САМАСТОЙНА*

- 173.** Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу, у якой α і β — вуглы, a і b — адпаведныя гэтым вуглам стараны трохвугольніка. Для знаходжання невядомых значэнняў карыстаўцеся прапарцыяй $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

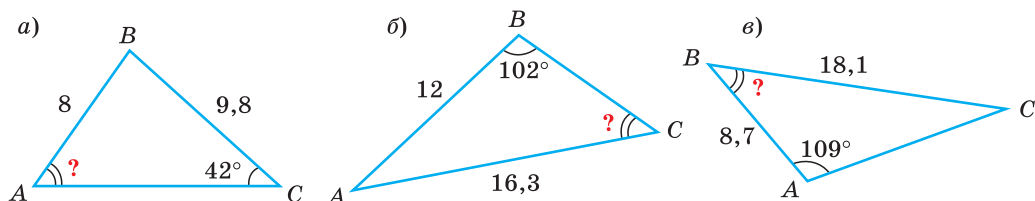
a	4		$\sqrt{6}$
b		6	2
α	30°	45°	120°
β	45°	60°	

- 174.** Па даных на рысунках 155, а)–в) вылічыце даўжыню стараны трохвугольніка, абазначанай пыталнікам. Пры разліках карыстаўцеся калькулятарам (табліцамі), вынік акругліце да 0,1.



Рыс. 155

- 175.** Па даных на рысунках 156, а)–в) вылічыце пры дапамозе калькулятара (табліц) вугал трохвугольніка, абазначаны пыталнікам. Адказ акругліце да 1° .



Рыс. 156

- 176.** Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка ABC . Пры дапамозе тэарэмы сінусаў знайдзіце даўжыню стараны b (акругліўшы адказ да 0,1), калі:

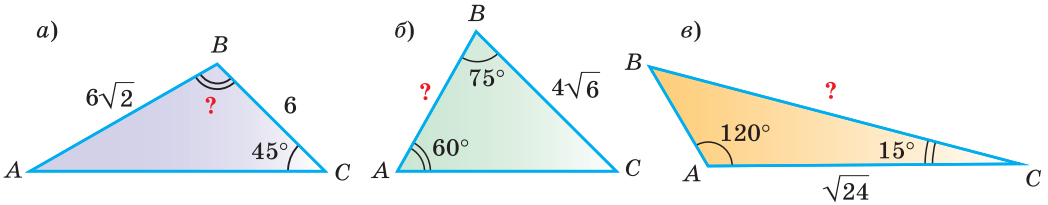
а) $a = 4$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$; б) $a = 6,5$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

- 177.** Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка ABC . Знайдзіце велічыню вугла B трохвугольніка ABC (акругліўшы адказ да 1°), калі:

а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62^\circ$; б) $AB = 4,6$, $AC = 4,3$, $\angle C = 26^\circ$.

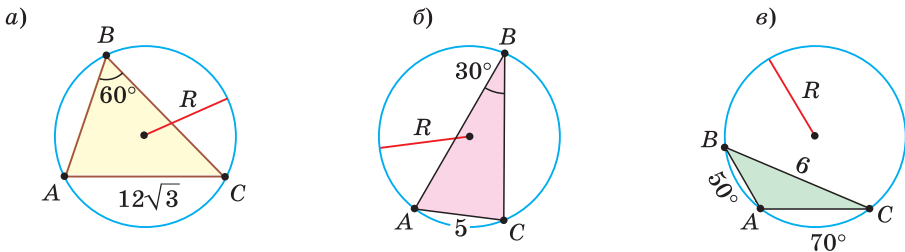
* Да кожнага параграфу ёсць рэзэрв задач, змешчаны ў дапаможніку «Наглядная геаметрыя. 9 клас» В. У. Казакова.

178. У трохвугольніку ABC вядома: $\sin A = 0,8$, $\sin B = 0,6$, $AC + BC = 28$ см. Знайдзіце даўжыні старон AC і BC .
179. Па даных на рысунках 157, а)–в) вылічыце:
 а) $\angle B$; б) AB ; в) BC .



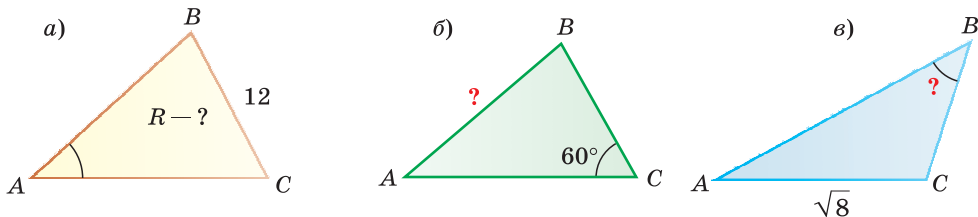
Рыс. 157

180. У паралэлаграме $ABCD$ $\angle A$ востры, $\sin \angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце перыметр паралэлаграма, калі $AB = 6$ см.
181. Па даных на рысунках 158, а)–в) знайдзіце радыус R акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .



Рыс. 158

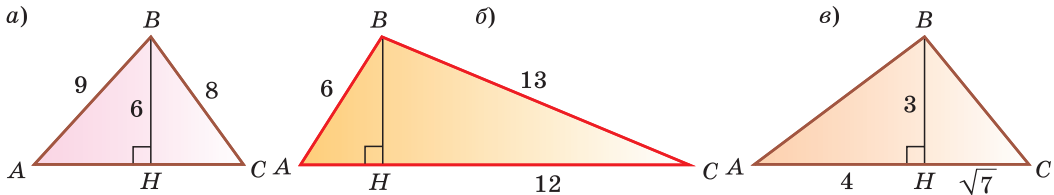
182. а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC (рыс. 159, а), калі $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.
 б) Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC (рыс. 159, б), калі $\angle C = 60^\circ$, а радыус яго апісанай акружнасці $R = 2\sqrt{3}$ см.
 в) Знайдзіце велічыню вострага вугла B трохвугольніка ABC (рыс. 159, в), калі $AC = \sqrt{8}$ см, а радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , роўны 2 см.



Рыс. 159

183. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O і дыяметрам, роўным $16\sqrt{2}$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC , калі $\angle BOC = 160^\circ$ і $\angle ABC - \angle ACB = 10^\circ$.

184. Па даных на рысунках 160, а)–в) вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .



Рыс. 160

185. а) У трохвугольніку ABC $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 105^\circ$, $BC = 6$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

б) Трохвугольнік ABC раўнабедраны, аснова $AC = 8$ см, вугал пры аснове роўны 15° . Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

в) Дакажыце, што калі адзін з вуглоў трохвугольніка роўны 30° або 150° , то даўжыня стараны трохвугольніка, процілеглай гэтаму вуглу, роўна радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

186. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка са старанамі:

а) 10 см, 10 см, 12 см;

б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.

187. У трохвугольніку дадзена старана a і вуглы β , γ . Выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, знайдзіце стараны b і c .

188. Выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a .

189. У прамавугольніку $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, M — сярэдзіна стараны AD . Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ACM .

190. а) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC , дыяганаль $AC = 8\sqrt{3}$ см. Прамень AC з'яўляецца бісектрысай вугла BAD , $\angle ACB = 30^\circ$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.

б) Асновы BC і AD упісанай трапецыі $ABCD$ роўны 11 см і 21 см адпаведна, бакавая старана AB роўна 13 см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

- 191*.** а) Пункт M ляжыць на аснове AC раўнабедранага трохвугольніка ABC . Дакажыце, што радыусы апісаных акружнасцей трохвугольнікаў ABM і CBM роўныя паміж сабой і не залежаць ад становішча пункта M .
- б) Дадзены трохвугольнік ABC . На яго старане AC узяты пункт M . Дакажыце, што адносіна радыусаў акружнасцей, апісаных каля трохвугольнікаў ABM і CBM , не залежыць ад становішча пункта M .
- 192*.** Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC , калі:
- а) $A(1; 1)$, $B(4; 4)$, $C(4; 0)$;
 б) $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$, $C(6; -4)$.
- 193*.** Дакажыце, што радыус акружнасці, якая праходзіць праз артацэнтр трохвугольніка і дзве любыя яго вяршыні, роўны радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.
- 194*.** Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC , дзе $AB < BC$; BM — медыяна, BK — бісектрыса трохвугольніка. Дакажыце, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, што $AK < AM$.
- 195*.** Дакажыце, што радыус апісанай акружнасці трохвугольніка большы або роўны палавіне любой стараны трохвугольніка.

Мадэляванне

Заданне 1.

1) Складзіце алгарытм знаходжання пры дапамозе тэарэмы сінусаў адлегласці ад пункта A да недаступнага пункта C (рыс. 161), калі вядома, што $AB = c$, $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$.

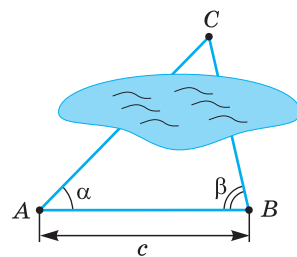
2) Выразіце $AC = b$ праз c , α і β .

3) Знайдзіце AC пры ўмове, што $AB = 30$ м, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Адказ акругліце да 1 м.

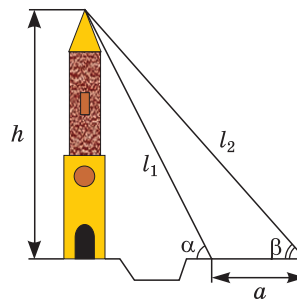
Заданне 2.

1) Гледзячы на рысунак 162, складзіце матэматычную мадэль знаходжання вышыні h вежы, даўжынь l_1 і l_2 тросаў, якія ідуць ад вяршыні вежы да зямлі. Адлегласць ад назіральніка да вежы вымераць рулеткай нельга, паколькі вежу акружае роў, але можна вымераць вуглы α і β і адлегласць a .

2) Знайдзіце вышыню вежы і даўжыні тросаў пры ўмове, што $a = 4$ м, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Адказ акругліце да 1 м.



Рыс. 161



Рыс. 162



Рыс. 163

Цікава ведаць. Прыборы для вымярэння вуглоў на мясцовасці называюцца *вугламерамі*. Яны бываюць лазернымі і электроннымі. Інжынеры-будаўнікі карыстаюцца *тахеаметрамі* (рыс. 163).

На рысунку 164 паказаны адзін з сімвалаў Беларусі — Камянецкая вежа, размешчаная ў Брэсцкай вобласці (г. Камянец). Гэта найбольш добра захаваная абаронная вежа, пабудаваная ў 1276—1288 гадах па загадзе князя Уладзіміра Васільковіча.

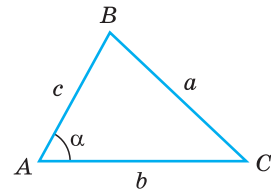
Яе вышыня складае 31 м. Вежа з'яўляецца помнікам раманскага стылю з элементамі ранняй готыкі.



Рыс. 164

§ 13. Тэарэма косінусаў

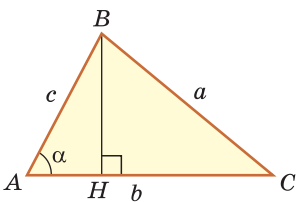
Тэарэма косінусаў дазваляе выразіць даўжыню любой стараны трохвугольніка праз даўжыні дзвюх іншых яго старон і косінус вугла паміж імі (напрыклад, даўжыню стараны a трохвугольніка ABC (рыс. 165) праз даўжыні старон b і c і $\cos \alpha$). Тэарэму косінусаў можна назваць самай «працуючай» у геаметрыі. Яна мае шматлікія вынікі, якія часта выкарыстоўваюцца пры рашэнні задач.



Рыс. 165

Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены забытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі, г. зн.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



Рыс. 166

Доказ.

Дакажам тэарэму для выпадку, калі ў трохвугольніку ABC вугал A і вугал C вострыя (рыс. 166).

Правядзём вышыню BH да стараны AC . З $\triangle ABH$ знаходзім $BH = c \sin \alpha$, $AH = c \cos \alpha$, адкуль $HC = b - c \cos \alpha$.

З $\triangle BHC$ па тэарэме Піфагора

$$\begin{aligned} a^2 &= HC^2 + BH^2 = (b - c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha)^2 = \\ &= b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Па асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Тады $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.