



Рыс. 163

Цікава ведаць. Прыборы для вымярэння вуглоў на мясцовасці называюцца *вугламерамі*. Яны бываюць лазернымі і электроннымі. Інжынеры-будаўнікі карыстаюцца *тахеаметрамі* (рыс. 163).

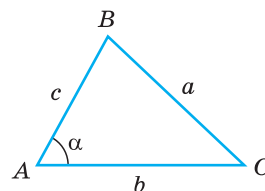
На рысунку 164 паказаны адзін з сімвалаў Беларусі — Камянецкая вежа, размешчаная ў Брэсцкай вобласці (г. Камянец). Гэта найбольш добра захаваная абаронная вежа, пабудаваная ў 1276—1288 гадах па загадзе князя Уладзіміра Васільковіча. Яе вышыня складае 31 м. Вежа з'яўляецца помнікам раманскага стылю з элементамі ранняй готыкі.



Рыс. 164

§ 13. Тэарэма косінусаў

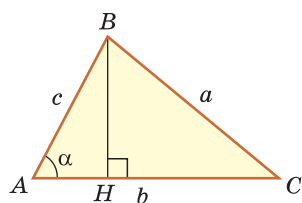
Тэарэма косінусаў дазваляе выразіць даўжыню любой стараны трохвугольніка праз даўжыні дзвюх іншых яго старон і косінус вугла паміж імі (напрыклад, даўжыню стараны a трохвугольніка ABC (рыс. 165) праз даўжыні старон b і c і $\cos \alpha$). Тэарэму косінусаў можна назваць самай «працуючай» у геаметрыі. Яна мае шматлікія вынікі, якія часта выкарыстоўваюцца пры рашэнні задач.



Рыс. 165

Тэарэма косінусаў. Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены забытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі, г. зн.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



Рыс. 166

Доказ.

Дакажам тэарэму для выпадку, калі ў трохвугольніку ABC вугал A і вугал C вострыя (рыс. 166).

Правядзём вышыню BH да стараны AC . З $\triangle ABH$ знаходзім $BH = c \sin \alpha$, $AH = c \cos \alpha$, адкуль $HC = b - c \cos \alpha$.

З $\triangle BHC$ па тэарэме Піфагора

$$\begin{aligned} a^2 &= HC^2 + BH^2 = (b - c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha)^2 = \\ &= b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Па асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Тады $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Справядліваць тэарэмы для выпадкаў, калі $\angle A$ або $\angle C$ тупы або прамы, дакажыце самастойна. Тэарэма даказана.

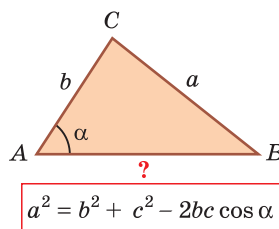
Для старон b і c тэарэма косінусаў запішацца так:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Заўвага. Калі $\gamma = 90^\circ$, то па тэарэме Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$. Паколькі $\cos 90^\circ = 0$, то $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ$. Такім чынам, тэарэма Піфагора — прыватны выпадак тэарэмы косінусаў.

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў можна рашыць наступныя задачы:

- ведаючы дзве стараны і вугал паміж імі, знайсці трэцюю старану трохвугольніка;
- ведаючы дзве стараны і вугал, процілеглы адной з гэтых старон, знайсці трэцюю старану (рыс. 167) (у гэтым выпадку магчымы два рашэнні).



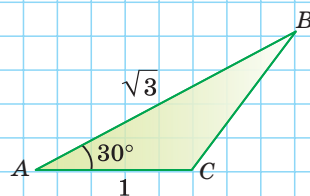
А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў знайдзіце BC :

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = \dots$

2) $BC = \dots$



Разгледзім вынікі з тэарэмы косінусаў, якія даюць магчымасць рашыць яшчэ шэраг задач.

Вынік 1.

Тэарэма косінусаў дазваляе, ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайсці яго вуглы (косінусы вуглоў). З роўнасці $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ вынікае формула

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для вуглоў β і γ атрымаем:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

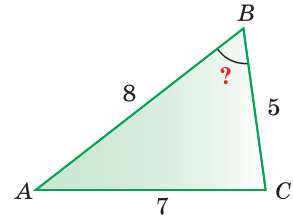
Прыклад 1. У трохвугольніку ABC стораны $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Знойдзем $\angle B$ (рыс. 168).

Па тэарэме косінусаў

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos B,$$

$$49 = 64 + 25 - 80 \cos B, \quad \cos B = \frac{1}{2}, \quad \angle B = 60^\circ.$$



Рыс. 168

Выкарыстаўшы запісаную вышэй формулу, мож-
на адразу атрымаць: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$.

Вынік 2.

Пры дапамозе тэарэмы косінусаў можна па трох старанах вызначыць від трохвугольніка: *востравугольны*, *прамавугольны* або *тупавугольны*.

Так, з формулы $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ з улікам таго, што $2bc > 0$, вынікае:

- 1) калі $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos \alpha > 0$ і вугал α востры;
- 2) калі $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos \alpha < 0$ і вугал α тупы;
- 3) калі $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos \alpha = 0$ і вугал α прамы.

Пры вызначэнні віду трохвугольніка дастаткова знайсці знак косінуса вугла, які ляжыць супраць большай стараны, паколькі толькі большы вугал трохвугольніка можа быць прамым або тупым.

Прыклад 2. Высветлім, якім з'яўляецца трохвугольнік са старанамі $a = 2$, $b = 3$ і $c = 4$. Для гэтага знойдзем знак косінуса вугла γ , які ляжыць супраць большай стараны c . Паколькі $a^2 + b^2 - c^2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = 4 + 9 - 16 < 0$, то $\cos \gamma < 0$, вугал γ тупы і дадзены трохвугольнік тупавугольны.

Сфармулюем правіла вызначэння віду трохвугольніка (адносна вуглоў).
Трохвугольнік з'яўляецца:

- 1) *востравугольным*, калі квадрат яго большай стараны меншы за суму квадратаў дзвюх іншых яго старон: $a^2 < b^2 + c^2$;
- 2) *тупавугольным*, калі квадрат яго большай стараны большы за суму квадратаў дзвюх іншых яго старон: $a^2 > b^2 + c^2$;
- 3) *прамавугольным*, калі квадрат яго большай стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон: $a^2 = b^2 + c^2$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.

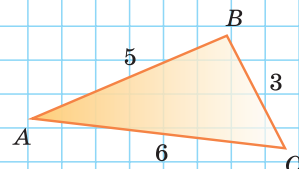
Тэст 2

Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік ABC :

а) востравугольным;

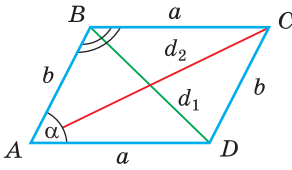
б) тупавугольным;

в) прамавугольным.



Вынік 3.

Сума квадратаў дыяганалей паралелаграма роўна суме квадратаў усіх яго старон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Рыс. 169

Доказ. Няхай у паралелаграме $ABCD$ $AD = a$, $AB = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ і $\angle A = \alpha$ — востры, адкуль $\angle B = 180^\circ - \alpha$ — тупы (рыс. 169). Па тэарэме косінусаў з $\triangle ABD$:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \tag{1}$$

З $\triangle ABC$: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)$. Паколькі $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, то

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \tag{2}$$

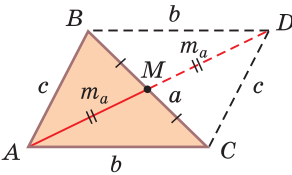
Склаўшы пачленна роўнасць (1) і роўнасць (2), атрымаем $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, што і трэба было даказаць.

Дадзеная формула дае магчымасць:

- ведаючы дзве суседнія стараны і адну з дыяганалей паралелаграма, знайсці другую дыяганаль;
- ведаючы дзве дыяганалі і адну са старон паралелаграма, знайсці суседнюю з ёй старану.

Вынік 4*.

Медыяну m_a трохвугольніка са старанамі a , b і c можна знайсці па формуле $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Рыс. 170

Доказ. Разгледзім $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = m_a$ — медыяна трохвугольніка (рыс. 170). Прадоўжым медыяну AM за пункт M на яе даўжыню: $MD = AM = m_a$. Правядзём адрэзкі BD і DC . Паколькі ў чатырохвугольніку $ABDC$ дыяганалі AD і BC пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то ён — паралелаграм. Па ўласцівасці дыяганалей паралелаграма $AD^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$, $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Адсюль вынікае, што $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Сцверджанне даказана.

Аналагічна: $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

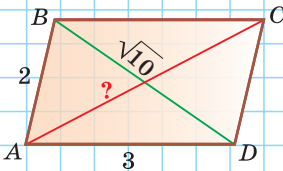
Формула медыяны дазваляе:

- ведаючы тры стараны трохвугольніка, знайсці любую з яго медыян;
- ведаючы дзве стараны і медыяну, праведзеную да трэцяй стараны, знайсці трэцюю старану;
- ведаючы тры медыяны, знайсці любую са старон трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3** і **Тэст 4***.

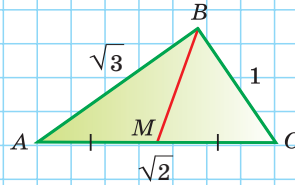
Тэст 3

Знайдзіце дыяганаль AC паралэлаграма, ведаючы, што $BD = \sqrt{10}$.



Тэст 4*

Знайдзіце медыяну BM трохвугольніка ABC па формуле медыяны.



Заданні да § 13

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. а) Дадзены трохвугольнік ABC , $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 120^\circ$. Знайсці старану c .

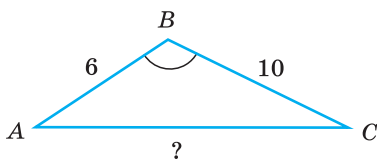
б) Дадзены трохвугольнік ABC , $a = 7$, $c = 8$, $\alpha = 60^\circ$. Знайсці старану b .

Рашэнне. а) Па тэарэме косінусаў $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 25 + 9 - 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Адсюль $c = \sqrt{49} = 7$.

б) Няхай $b = x$. Па тэарэме косінусаў $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \gamma$, г. зн. $7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$, $49 = 64 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Адсюль $b = 3$ або $b = 5$, паколькі для набору даўжынь адрэзкаў $7, 3, 8$ і $7, 5, 8$ выконваецца няроўнасць трохвугольніка.

Адказ: а) 7; б) 3 або 5.

Задача 2. Дзве стараны трохвугольніка роўны 6 і 10 , яго плошча — $15\sqrt{3}$. Знайсці трэцюю старану трохвугольніка пры ўмове, што процілеглы ёй вугал — тупы.



Рыс. 171

Рашэнне. Няхай у $\triangle ABC$ стараны $AB = 6$, $BC = 10$ і $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$ (рыс. 171).

Паколькі $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B$,

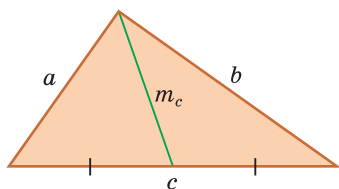
то $15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin B$, адкуль $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Паколькі $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і па ўмове $\angle B$ —

тупы, то $\angle B = 120^\circ$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Для знаходжання стараны AC прыменім тэарэму косінусаў: $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos B$, $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, $AC = 14$.

Адказ: 14.

Задача 3*. Знайсці плошчу трохвугольніка, дзве стараны якога роўны 6 і 8, а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 5.



Рыс. 172

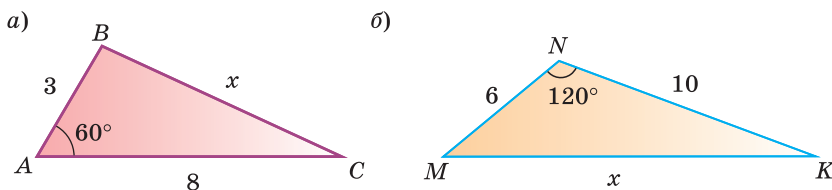
Рашэнне. Абазначым стараны трохвугольніка a , b , c . Няхай $a = 6$, $b = 8$, $m_c = 5$ — медыяна (рыс. 172). Па формуле медыяны $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, адкуль $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, $4 \cdot 25 = 72 + 128 - c^2$, $c^2 = 100$, $c = 10$. Па адваротнай тэарэме Піфагора дадзены трохвугольнік са старанамі 6, 8 і 10 — прамавугольны, яго плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S_{\Delta} = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Адказ: 24.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

196. Выкарыстаўшы тэарэму косінусаў, знайдзіце старану x (рыс. 173, а, б).



Рыс. 173

197. Выкарыстаўшы калькулятар (табліцы), знайдзіце старану c трохвугольніка (вынік акругліце да 0,1 см), калі:

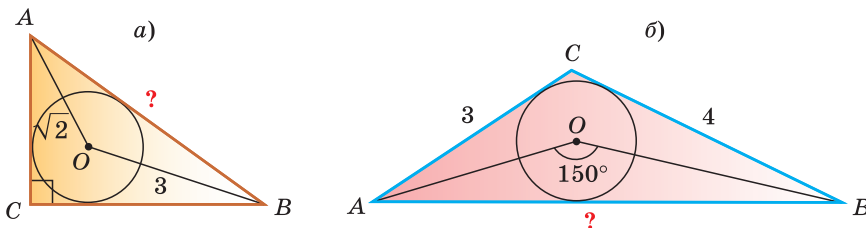
а) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 50^\circ$;

б) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\gamma = 132^\circ$.

198. У трохвугольніку MNK стараны $MK = 4$ см, $NK = 6$ см, $\cos K = \frac{2}{3}$. Знайдзіце даўжыню стараны MN .

199. У востравугольным трохвугольніку ABC стараны $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\sin C = 0,6$. Знайдзіце даўжыню стараны AB .

200. а) Старана роўнастаронняга трохвугольніка ABC роўна 10 см. На старане BC узяты пункт M так, што $BM : MC = 2 : 3$. Знайдзіце даўжыню адрэзка AM .
 б) На гіпатэнузе AB прамавугольнага трохвугольніка ABC узяты пункт M так, што $AM : MB = 2 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка CM , калі $AB = 9$ см, $BC = 6$ см.
201. Дыяганалі паралелаграма роўны 8 см і 14 см, косінус вострага вугла паміж імі роўны $\frac{2}{7}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма.
202. У трохвугольніку ABC праведзены медыяны $AM = 9$ см і $BK = 6$ см, якія перасякаюцца ў пункце E , $\angle MEK = 120^\circ$. Знайдзіце старану AB трохвугольніка ABC .
203. а) У трохвугольніку ABC старана $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30^\circ$, $BC - AB = 4$ см. Вылічыце даўжыні старон AB і BC .
 б) У трохвугольніку ABC старана $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60^\circ$, $AB : AC = 1 : 2$. Вылічыце даўжыні старон AB і AC .
204. У трохвугольніку ABC стараны $AB = 5$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайдзіце найменшае магчымае значэнне даўжыні стараны AC .
205. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам O . Знайдзіце даўжыню стараны AB , калі:
- а) $\angle C = 90^\circ$, $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$ (рыс. 174, а);
 б) $\angle AOB = 150^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$ (рыс. 174, б).

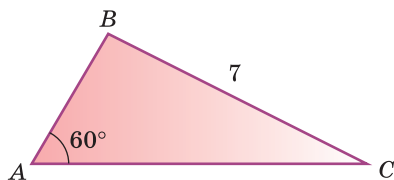


Рыс. 174

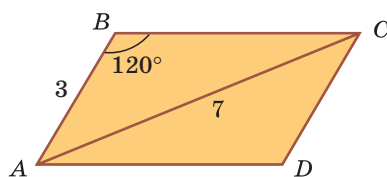
206. а) У трохвугольніку ABC стараны $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $AC = 3$ см. Знайдзіце градусную меру вугла A .
 б) У трохвугольніку ABC стараны $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Знайдзіце градусную меру вугла B .
207. а) Знайдзіце косінус меншага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 2 см, 3 см і 4 см.
 б) Знайдзіце косінус большага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 5 см, 6 см, 7 см.

208. Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік (востравугольным, прамавугольным або тупавугольным), калі яго стораны роўны:
- а) 10, 8 і 7; б) 20, 21 і 29; в) 5, 6 і 8.

209. а) Перыметр трохвугольніка ABC роўны 18. Вылічыце яго плошчу па даных рысунка 175.
- б) Вугал ABC паралелаграма $ABCD$ роўны 120° . Вылічыце перыметр паралелаграма па даных рысунка 176.

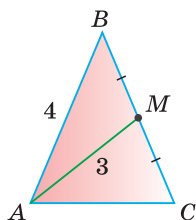


Рыс. 175

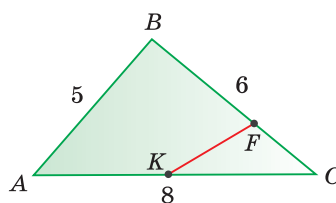


Рыс. 176

210. а) У паралелаграме $ABCD$ стораны $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, дыяганаль $AC = 6$ см. Знайдзіце даўжыню дыяганалі BD .
- б) У паралелаграме $ABCD$ старана $AB = 2\sqrt{6}$ см, дыяганалі $AC = 4$ см, $BD = 8$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AD .
211. а) У паралелаграме стораны роўны 7 см і 9 см, а дыяганалі адносяцца як 4 : 7. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.
- б) У паралелаграме адна з дыяганалей на 2 см большая за другую, а стораны роўны 11 см і 13 см. Знайдзіце дыяганалі паралелаграма.
212. а) У раўнабедраным трохвугольніку ABC стораны $AB = BC = 4$ см, $AM = 3$ см — медыяна (рыс. 177). Знайдзіце аснову AC трохвугольніка.
- б) У трохвугольніку ABC стораны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. На старанах BC і AC узяты пункты F і K адпаведна, такія, што $BF = 2FC$, $AK = KC$ (рыс. 178). Знайдзіце даўжыню адрэзка KF .



Рыс. 177



Рыс. 178

213. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC , датыкаецца да стараны AC у пункце K . Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC , калі $AK = 5$ см, $KC = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$.

- 214.** Знайдзіце даўжыню медыяны трохвугольніка са старанамі 7 см, 11 см, 12 см, праведзеную з вяршыні большага вугла трохвугольніка.
- 215.** а) У трапецыі $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дыяганалі $AC = 6$ см, $BD = 9$ см, O — пункт перасячэння дыяганалей, $\cos \angle COD = \frac{1}{4}$. Знайдзіце сярэдняю лінію трапецыі.
- б) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ ($AD \parallel BC$), дыяганаль AC роўна 9 см, $AD - CD = 3$ см, $\cos \angle CAD = \frac{5}{6}$. Знайдзіце перыметр трапецыі.



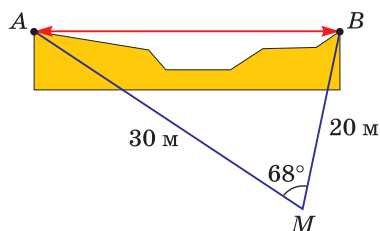
ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

- 216*.** Дзве стараны трохвугольніка роўны 8 см і 14 см, а медыяна, праведзеная да трэцяй стараны, роўна 7 см. Знайдзіце трэцюю старану трохвугольніка.
- 217*.** Чатырохвугольнік $ABCD$ упісаны ў акружнасць, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 3$. Знайдзіце дыяганаль BD .
- 218*.** У выпуклым чатырохвугольніку адрэзкі, якія злучаюць сярэдзіны процілеглых старон, роўны 2 і 3, а вугал паміж імі роўны 60° . Знайдзіце дыяганалі чатырохвугольніка.
- 219*.** У трохвугольніку ABC $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што з павелічэннем вугла A старана a павялічваецца.
- 220*.** Высветліце, якім з'яўляецца трохвугольнік з вышынямі, роўнымі 3, 4 і 5: востравугольным, прамавугольным або тупавугольным.
- 221*.** Дакажыце, што плошчу паралелаграма (які не з'яўляецца прамавугольнікам) можна вылічыць па формуле $S = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$, дзе d_1, d_2 — дыяганалі ($d_2 > d_1$), α — востры вугал паралелаграма.

Рэальная геаметрыя

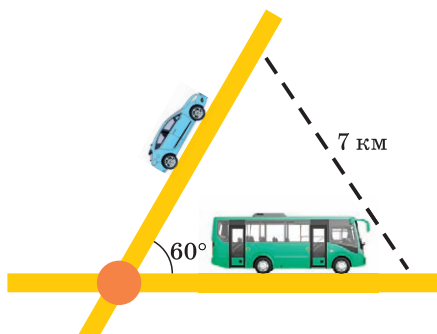
Заданне 1. Растлумачце, як можна знайсці адлегласць паміж пунктамі A і B (рыс. 179), калі вядомы адлегласці ад пункта M , дзе знаходзіцца назіральнік, да пунктаў A і B і вугал AMB . Знайдзіце гэту адлегласць пры ўмове, што $MA = 30$ м, $MB = 20$ м, $\angle AMB = 68^\circ$. Адказ акругліце да метраў.

(Для самакантролю. Адказ: шуканы лік у метрах роўны колькасці дзён у лютым высакоснага года.)



Рыс. 179

Заданне 2. З аднаго населенага пункта выходзяць дзве дарогі, вугал паміж якімі 60° (рыс. 180). Адначасова па адной дарозе выязджае аўтамабіль са скорасцю 80 км/г, па другой — аўтобус са скорасцю 50 км/г. Вызначце ў мінутах, праз які час адлегласць паміж аўтобусам і аўтамабілем стане роўнай 7 км.

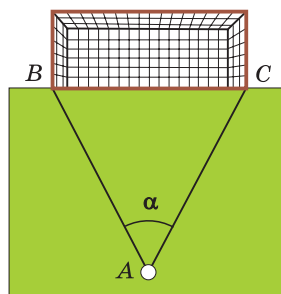


Рыс. 180

(Для самакантролю. Адказ: шуканы лік роўны n , дзе 1) — Меркурый; 2) — Венера; 3) — Зямля; ...; n) — Сатурн.)

Заданне 3. Вызначце вугал абстрэлу футбольных варот з 11-метровай адзнакі (рыс. 181). Для гэтага можна знайсці ў Інтэрнэце памеры футбольных варот і выканаць разлікі. А можна выйсці на школьнае футбольнае поле, вымераць крокамі адлегласць ад 11-метровай адзнакі да адной са стоек варот, напрыклад адлегласць AB (адлегласць AC будзе такой самай), і шырыню вырот, г. зн. даўжыню BC . Затым пры дапамозе тэарэмы косінусаў трэба знайсці $\angle BAC = \alpha$. Выкарыстайце абодва спосабы і параўнайце вынікі.

(Для самакантролю. Адказ: шуканая колькасць градусаў роўна колькасці гадоў, пражытых А. С. Пушкіным.)



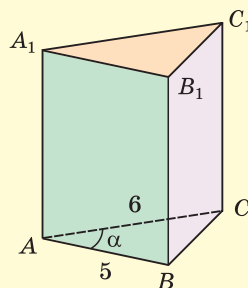
Рыс. 181

Геаметрыя 3D

Заданне. Дадзена прамая трохвугольная прызма (бакавыя грані — прамавугольнікі), у аснове якой ляжыць трохвугольнік са старанамі 5 см і 6 см. Косінус вугла α паміж імі роўны 0,6 (рыс. 182). Большая па плошчы бакавая грань прызмы з'яўляецца квадратам.

Знайдзіце:

- а) плошчу бакавой паверхні прызмы;
- б) плошчу поўнай паверхні прызмы.



Рыс. 182



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму сінусаў.
2. Асноўныя задачы, якія дазваляе рашыць тэарэма сінусаў.
3. Тэарэму косінусаў.
4. Алгарытм знаходжання косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Формулу, якая звязвае стараны і дыяганалі паралелаграма.
6. Як па трох старанах трохвугольніка вызначыць яго від: востравугольны, прамавугольны, тупавугольны.
- 7*. Формулу медыяны трохвугольніка.

Умеем

1. Даказваць тэарэму сінусаў.
2. Па дзвюх старанах і вугле, процілеглым адной з гэтых старон, знаходзіць вугал, процілеглы другой старане.
3. Па двух вуглах і старане, процілеглай аднаму з вуглоў, знаходзіць старану, процілеглую другому вуглу.
4. Па старане трохвугольніка і процілеглым ёй вугле знаходзіць радыус апісанай акружнасці.
5. Даказваць тэарэму косінусаў.
6. Знаходзіць косінус вугла трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.
7. Знаходзіць дыяганаль паралелаграма, ведаючы дзве яго суседнія стараны і другую дыяганаль.
- 8*. Знаходзіць медыяну трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.

§ 14. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў

1. Формула Герона

Мы ведаем, як знайсці плошчу трохвугольніка па аснове і вышыні, праведзенай да гэтай асновы: $S = \frac{1}{2}ah$, а таксама па дзвюх старанах і вугле паміж імі: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Цяпер мы выведзем формулу знаходжання плошчы трохвугольніка па трох старанах.

Тэарэма (формула Герона).

Плошчу трохвугольніка са старанамі a , b і c можна знайсці па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе $p = \frac{a+b+c}{2}$ — паўперыметр трохвугольніка.