



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму сінусаў.
2. Асноўныя задачы, якія дазваляе рашыць тэарэма сінусаў.
3. Тэарэму косінусаў.
4. Алгарытм знаходжання косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Формулу, якая звязвае стараны і дыяганалі паралелаграма.
6. Як па трох старанах трохвугольніка вызначыць яго від: востравугольны, прамавугольны, тупавугольны.
- 7*. Формулу медыяны трохвугольніка.

Умеем

1. Даказваць тэарэму сінусаў.
2. Па дзвюх старанах і вугле, процілеглым адной з гэтых старон, знаходзіць вугал, процілеглы другой старане.
3. Па двух вуглах і старане, процілеглай аднаму з вуглоў, знаходзіць старану, процілеглую другому вуглу.
4. Па старане трохвугольніка і процілеглым ёй вугле знаходзіць радыус апісанай акружнасці.
5. Даказваць тэарэму косінусаў.
6. Знаходзіць косінус вугла трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.
7. Знаходзіць дыяганаль паралелаграма, ведаючы дзве яго суседнія стараны і другую дыяганаль.
- 8*. Знаходзіць медыяну трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.

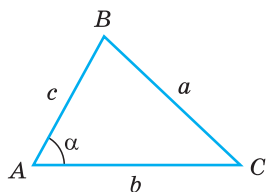
§ 14. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў

1. Формула Герона

Мы ведаем, як знайсці плошчу трохвугольніка па аснове і вышыні, праведзенай да гэтай асновы: $S = \frac{1}{2}ah$, а таксама па дзвюх старанах і вугле паміж імі: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Цяпер мы выведзем формулу знаходжання плошчы трохвугольніка па трох старанах.

Тэарэма (формула Герона).

Плошчу трохвугольніка са старанамі a , b і c можна знайсці па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе $p = \frac{a+b+c}{2}$ — паўперыметр трохвугольніка.



Рыс. 183

Доказ. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ (рыс. 183). З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ вынікае, што $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Для $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ сінус дадат-

ны. Таму $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. З тэарэмы косінусаў $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, адкуль $\cos^2 \alpha = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Тады } S_{ABC} &= \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)} = \\ &= bc \cdot \frac{1}{bc} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2}} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Паколькі } \frac{b+c-a}{2} &= \frac{b+c+a-2a}{2} = p-a, \quad \frac{a-b+c}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = p-b, \quad \frac{a+b-c}{2} = \\ &= \frac{a+b+c-2c}{2} = p-c, \text{ то } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \text{ Тэарэма даказана.} \end{aligned}$$

2. Рашэнне трохвугольнікаў

Рашэннем трохвугольніка называецца знаходжанне яго невядомых старон і вуглоў (часам іншых элементаў) па даных, якія вызначаюць трохвугольнік. Такая задача часта сустракаецца на практыцы, напрыклад у геадэзіі, астраноміі, будаўніцтве, навігацыі.

Разгледзім *алгарытмы* рашэння трох задач.

Задача А (рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вугле паміж імі).

Дадзена: a, b, γ (рыс. 184).

Знайсці: c, α, β .

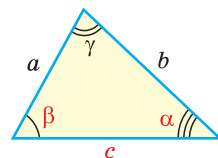
Рашэнне.

1) Па тэарэме косінусаў $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$.

2) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

3) Вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

4) Вугал $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.



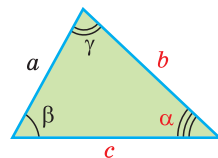
Рыс. 184

Заўвага. Знаходжанне вугла α па тэарэме сінусаў $\left(\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \right)$ патрабуе высвятлення таго, востры ці тупы вугал α .

Задача В (рашэнне трохвугольніка па старане і двух прылеглых да яе вуглах).

Дадзена: a, β, γ (рыс. 185).

Знайсці: α, b, c .



Рыс. 185

Рашэнне.

1) Вугал $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$.

2) Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha$ і $\sin \beta$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

3) Старану c можна знайсці пры дапамозе тэарэмы косінусаў або тэарэмы сінусаў: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ або $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ($\cos \gamma$ і $\sin \gamma$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

Задача С (рашэнне трохвугольніка па трох старанах).

Дадзена: a, b, c (рыс. 186).

Знайсці: α, β, γ і радыус R апісанай акружнасці.

Рашэнне:

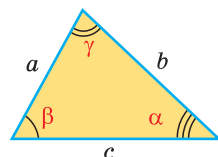
1) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2) Ведаючы $\cos \alpha$, вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

3) Аналагічна знаходзім вугал β .

4) Вугал $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$.

5) Радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка можна знайсці па формуле $R = \frac{abc}{4S}$, дзе $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



Рыс. 186

Заўвага*. Другім спосабам знаходжання R будзе знаходжанне косінуса любога вугла пры дапамозе тэарэмы косінусаў $\left(\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$, затым знаходжанне па косінусе вугла яго сінуса $\left(\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \right)$ і, нарэшце, выкарыстанне тэарэмы сінусаў $\left(\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \right)$ для знаходжання R .



Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

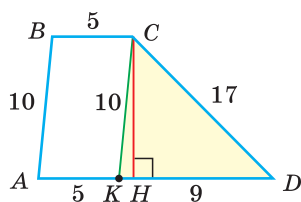
Задача 1. Знайсці плошчу S і радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі 9, 12 і 15.

Рашэнне. *Спосаб 1.* Выкарыстаем формулу Герона. Абазначым $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Атрымаем: $p = \frac{9+12+15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тады $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
 $= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радыус R апісанай акруж-
 насці знойдзем з формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Маем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 15}{4 \cdot 54} = 7,5$.
 Адказ: $S = 54$; $R = 7,5$.

Спосаб 2. Паколькі $9^2 + 12^2 = 15^2$, г. зн. $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то
 трохвугольнік — прамавугольны па адваротнай тэарэме Піфагора. Яго
 плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$, а радыус апісанай
 акружнасці роўны палавіне гіпатэнузы: $R = \frac{15}{2} = 7,5$.

Задача 2. Знайсці плошчу трапецыі з асновамі, роўнымі 5 і 14, і бакавымі
 старанамі, роўнымі 10 і 17.



Рыс. 187

Рашэнне. Няхай у трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 14$
 і $BC = 5$, бакавыя стораны $AB = 10$ і $CD = 17$. Пра-
 вядзём $CK \parallel AB$ (рыс. 187). Паколькі $ABCK$ — па-
 ралелаграм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, адкуль
 $KD = AD - AK = 9$. Знойдзем вышыню CH трох-
 вугольніка KCD , якая роўна вышыні трапецыі.
 Плошчу трохвугольніка KCD знойдзем па формуле
 Герона, абазначыўшы яго стораны $a = 10$, $b = 17$,
 $c = 9$. Атрымаем:

$$p = \frac{10+17+9}{2} = 18, \quad p - a = 18 - 10 = 8,$$

$$p - b = 18 - 17 = 1, \quad p - c = 18 - 9 = 9,$$

$$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36. \quad \text{Паколькі } S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH, \text{ то } \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36,$$

$$CH = 8. \quad \text{Плошча трапецыі } S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CH = \frac{14+5}{2} \cdot 8 = 76.$$

Адказ: 76.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

222. Стораны трохвугольніка $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Знайдзіце:

а) паўперыметр трохвугольніка $p = \frac{a+b+c}{2}$;

б) значэнні выразаў $p - a$, $p - b$, $p - c$;

в) плошчу трохвугольніка па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

- 223.** Пры дапамозе формулы Герона знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:
а) 7 см, 15 см, 20 см; б) 10 м, 10 м, 4 м.
- 224.** а) Знайдзіце плошчу паралелаграма, адна старана якога роўна 15 см, а дыяганалі — 8 см і 26 см.
б) Знайдзіце плошчу паралелаграма, дзве стараны якога роўны 9 см і 10 см, а адна з дыяганалей — 17 см.
- 225.** а) Знайдзіце найбольшую вышыню трохвугольніка са старанамі 20 см, 13 см, 11 см.
б) Знайдзіце найменшую вышыню трохвугольніка са старанамі 40 см, 37 см, 13 см.
- 226.** а) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 5 см і 15 см, а бакавыя стораны — 9 см і 17 см.
б) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 3 см і 12 см, а дыяганалі — 13 см і 14 см.
- 227.** Знайдзіце плошчу трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі 15 см, 13 см і 4 см.
- 228.** Рашыце трохвугольнік, у якога вядомы:
а) $a = 4$; $b = 5$; $\gamma = 30^\circ$; б) $a = 1$; $b = 2$; $\gamma = 45^\circ$;
в) $a = 8$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 50^\circ$; г) $b = 10$; $\beta = 100^\circ$; $\gamma = 32^\circ$;
д) $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; е) $a = 50$; $b = 40$; $c = 20$.
- 229.** Медыяны, праведзеныя да дзвюх старон трохвугольніка, роўны 12 см і 9 см, трэцяя старана трохвугольніка роўна 6 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.



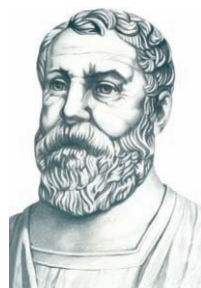
ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

- 230*.** а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 29 см, 25 см і 6 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі, роўнымі 20 см, 15 см, 7 см.
- 231*.** Знайдзіце радыус акружнасці, якая датыкаецца да старон трохвугольніка, роўных 13 і 15, цэнтр якой ляжыць на трэцяй старане, роўнай 14.
- 232*.** Цэнтр O акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC , злучаны з яго вяршынямі адрэзкамі. Плошчы трохвугольнікаў, на якія разбіваецца трохвугольнік ABC , роўны 7 см^2 , 15 см^2 , 20 см^2 . Знайдзіце стораны трохвугольніка.

Цікава ведаць. Герон Александрыўскі — адзін з выдатных інжынераў антычнага свету. Многія яго вынаходніцтвы да гэтага часу выклікаюць захапленне. Вось толькі некаторыя з іх: адомер — механізм для знаходжання адлегласцей на мясцовасці, аўтамат па продажу вады, устройства для аўтаматычнага адкрывання дзвярэй і інш.

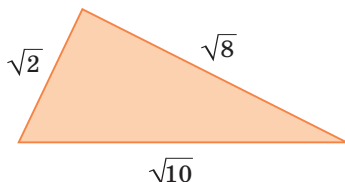


Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым яшчэ знакаміты матэматык Герон. Якія трохвугольнікі называюцца *геронавымі трохвугольнікамі*? Устанавіце пры дапамозе Вікіпедыі, чаму гэтага вучонага звалі Геронам Александрыўскім і ці мог ён сустракацца з Піфагорам.



Гімнастыка розуму

Прыдумайце прыгожы спосаб знаходжання плошчы паказанага на рысунку 188 трохвугольніка.

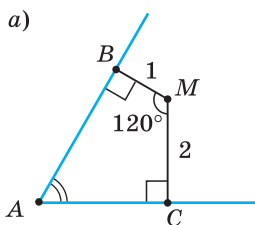


Рыс. 188

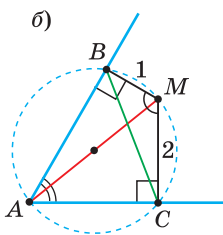
§ 15*. Крэатыўная геаметрыя

1. Прыклады рашэння задач з выкарыстаннем тэарэмы сінусаў і тэарэмы косінусаў

Задача 1. Унутры вугла A , роўнага 60° , узяты пункт M , які знаходзіцца на адлегласці 1 ад адной стараны вугла і на адлегласці 2 ад другой стараны. Знайсці адлегласць ад пункта M да вяршыні вугла A (рыс. 189, а).



Рыс. 189



Рашэнне. Няхай $MB \perp AB$, $MC \perp AC$, $MB = 1$, $MC = 2$. Знойдзем даўжыню адрэзка AM . Сума вуглоў чатырохвугольніка $ABMC$ роўна 360° . Таму $\angle BMC = 120^\circ$.

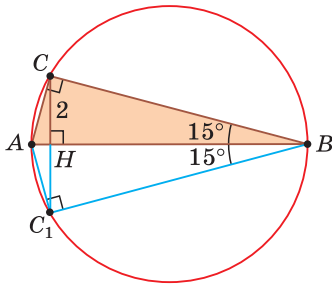
Паколькі ў чатырохвугольніку $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180^\circ$, то каля яго можна апісаць акружнасць па прымеце ўпісанага чатырохвугольніка (рыс. 189, б). Паколькі прамы ўпісаны вугал абаяпіраецца на дыяметр, то адрэ-

зак AM — дыяметр гэтай акружнасці, г. зн. $AM = 2R$, дзе R — радыус. З $\triangle BMC$ па тэарэме косінусаў $BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2 \cdot MB \cdot MC \cdot \cos 120^\circ = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, $BC = \sqrt{7}$. З $\triangle ABC$ па тэарэме сінусаў $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, адкуль $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = AM$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Адказ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Заўвага. Другім спосабам рашэння будзе прадаўжэнне адрэзка BM да перасячэння з праменем AC і выкарыстанне ўласцівасцей атрыманых прамавугольных трохвугольнікаў. Разгледзьце гэты спосаб самастойна.

Задача 2. У прамавугольным трохвугольніку ABC вядома: $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 15^\circ$, вышыня $CH = 2$ (рыс. 190). Знайсці гіпатэнузу AB .

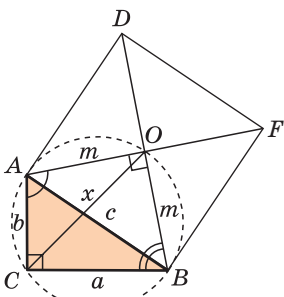


Рыс. 190

Рашэнне. Пабудуем $\triangle ABC_1$, сіметрычны $\triangle ABC$ адносна прамой AB (гл. рыс. 190). Паколькі $\angle ACB + \angle AC_1B = 180^\circ$, то вакол чатырохвугольніка $ACBC_1$ можна апісаць акружнасць, дзе AB — дыяметр гэтай акружнасці (прамы ўпісаны вугал абапіраецца на дыяметр). Трохвугольнік C_1CB упісаны ў гэту акружнасць, $\angle CBC_1 = 30^\circ$, $CC_1 = 4$. Па тэарэме сінусаў $\frac{CC_1}{\sin \angle CBC_1} = 2R$, $\frac{4}{\sin 30^\circ} = AB$, адкуль $AB = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

Адказ: 8.

Задача 3. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $BC = a$ і $AC = b$. На гіпатэнузе AB як на старане пабудаваны квадрат $ADFB$ (рыс. 191). Знайсці адлегласць ад цэнтра O гэтага квадрата да вяршыні C прамога вугла, г. зн. адрэзак CO .



Рыс. 191

Рашэнне. *Спосаб 1.* Паколькі $\angle AOB = 90^\circ$ (дыяганалі квадрата $ADFB$ узаемна перпендыкулярныя), то $\angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$, таму чатырохвугольнік $AOBC$ з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, яе дыяметр $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тады $AO = OB = m = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Няхай $CO = x$. Па тэарэме косінусаў з $\triangle AOC$ знаходзім $\cos \angle OAC = \frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm}$,

з $\triangle BOC$ знаходзім $\cos \angle OBC = \frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$.