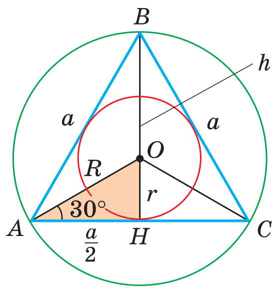
При дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, якую тэарэму адносна правільных многавугольнікаў даказаў вялікі матэматык Карл Гаўс і якую геаметрычную фігуру ён загадаў намаляваць на сваім помніку.

§ 18. Правільны трохвугольнік, чатырохвугольнік, шасцівугольнік

1. Правільны трохвугольнік

Абагульнім інфармацыю аб правільным (роўнастаронні) трохвугольніку.

Запішам формулы вышыні h, плошчы S, радыуса R апісанай і радыуса r упісанай акружнасцей правільнага трохвугольніка ABC са стараной a (рыс. 209):



Рыс. 209

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

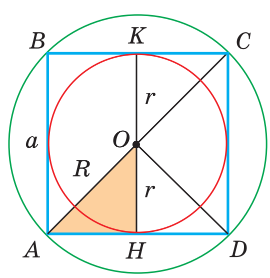
З $\triangle AOH$, дзе $\angle OAH = 30°$, вынікае, што $r = \frac{1}{2}R$.

Пры зададзенай старане a правільнага трохвугольніка яго можна пабудаваць пры дапамозе цыркуля і лінейкі, выкарыстаўшы алгарытм пабудовы трохвугольніка па трох старанах.

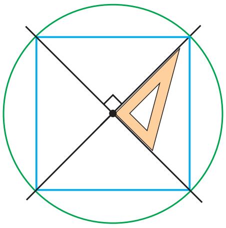
Паколькі $BO : OH = 2 : 1$, то $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. Для пабудовы апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага трохвугольніка дастаткова пабудаваць яго медыяны (вышыні), пункт перасячэння якіх будзе цэнтрам шуканых акружнасцей.

2. Правільны чатырохвугольнік

Няхай старана квадрата $ABCD$ роўна a, R — радыус апісанай, r — радыус упісанай акружнасці (рыс. 210). Дыяметр яго апісанай акружнасці роўны дыяганалі AC. У сваю чаргу, $AC = a\sqrt{2}$, адкуль $2R = a\sqrt{2}$, або $\boxed{R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.}$ З раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка AOD таксама вынікае, што $AD = AO\sqrt{2}$, $\boxed{a = R\sqrt{2}.}$ Дыяметр KH акружнасці, упісанай у квадрат, роўны даўжыні стараны квадрата,



Рыс. 210

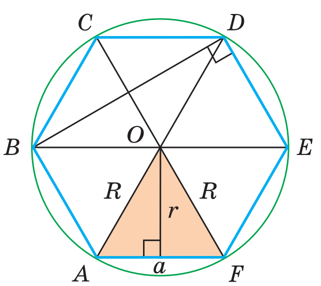

Рыс. 211

г. зн. $KH = AB = a$, адкуль $a = 2r$, $\boxed{r = \frac{a}{2}.}$ З прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка AOH таксама вынікае, што $r = AH = \frac{a}{2}$.

Для пабудовы квадрата, упісанага ў дадзеную акружнасць з зададзеным цэнтрам, можна пабудаваць дзве ўзаемна перпендыкулярныя прамыя, якія праходзяць праз цэнтр акружнасці (рыс. 211). Гэтыя прамыя перасякуць акружнасць у вяршынях квадрата. Абгрунтуйце гэта сцверджанне. Выканайце гэту пабудову пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка.

3. Правільны шасцівугольнік

Разгледзім правільны 6-вугольнік $ABCDEF$ са стараной a, упісаны ў акружнасць з цэнтрам O і радыусам R (рыс. 212). Яго ўнутраныя вуглы роўны па 120°. Трохвугольнік AOF раўнабедраны, паколькі $OA = OF = R$, $\angle AOF = \frac{360°}{6} = 60°$. Таму $\triangle AOF$ — роўнастаронні, адкуль $\boxed{a = R.}$



Рыс. 212

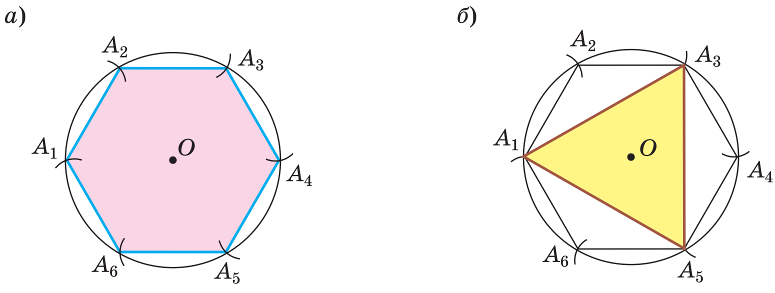
Паколькі радыус r упісанай акружнасці з'яўляецца вышынёй роўнастаронняга трохвугольніка са стараной a, то $\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$

Паколькі $\angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 180°$, то вялікая (галоўная) дыяганаль BE правільнага шасцівугольніка праходзіць праз яго цэнтр O, а ўсе тры вялікія дыяганалі AD, BE і CF разбіваюць яго на шэсць роўных роўнастаронніх трохвугольнікаў. Плошча правільнага шасцівугольніка

$$\boxed{S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.}$$

Малая (меншая) дыяганаль BD правільнага шасцівугольніка з'яўляецца дыяганаллю ромба $BCDO$ ($BC = CD = DO = BO = a$) з вугламі, роўнымі 60° і 120°. Адкуль $CD \parallel BE$. Трохвугольнік BDE з'яўляецца прамавугольным ($\angle BDE = 90°$ як вугал, які абапіраецца на дыяметр), $\angle BED = 60°$, $\angle DBE = 30°$. Акрамя таго, $CD \parallel AF$, $BC \parallel FE$, $AB \parallel ED$, а адлегласці паміж названымі парамі паралельных прамых роўны $a\sqrt{3}$. Дакажыце гэта самастойна.

Пабудуем пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільны шасцівугольнік, упісаны ў дадзеную акружнасць з радыусам R (рыс. 213, *а*). Выкары-



Рыс. 213

стаем тое, што $a = R$, дзе a — старана правільнага шасцівугольніка. Адну вяршыню A_1 шасцівугольніка адзначым на акружнасці адвольна. З яе як з цэнтра радыусам, роўным радыусу R, зробім засечку на акружнасці і атрымаем вяршыню A_2. Затым аналагічна паслядоўна пабудуем астатнія вяршыні: A_3, A_4, A_5, A_6 — і злучым іх адрэзкамі. З роўнасці роўнастаронніх трохвугольнікаў ($\triangle A_1OA_2 = \triangle A_2OA_3 = \triangle A_3OA_4 = \triangle A_4OA_5 = \triangle A_5OA_6 = \triangle A_6OA_1$) вынікае роўнасць вуглоў пабудаванага шасцівугольніка $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, адкуль заключаем, што ён — правільны.

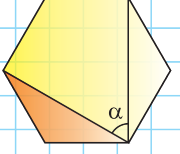
Для пабудовы правільнага трохвугольніка, упісанага ў дадзеную акружнасць, дастаткова злучыць адрэзкамі праз адну вяршыні правільнага ўпісанага шасцівугольніка (рыс. 213, *б*). Для пабудовы правільнага 12-вугольніка трэба падзяліць дугі A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_6 папалам (пабудаваўшы пасярэднія перпендыкуляры да старон правільнага шасцівугольніка) і кожны з пунктаў дзялення злучыць адрэзкамі з канцамі адпаведнай стараны.

Выкарыстаўшы дадзены спосаб дзялення дуг папалам, можна пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудаваць мноства правільных многавугольнікаў. Так, з правільнага 4-вугольніка можна пабудаваць правільны 8-вугольнік, 16-вугольнік, і наогул любы правільны 2^k-вугольнік, дзе k — цэлы лік, большы за два.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

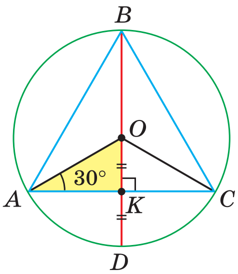
На рысунку паказаны відарыс правільнага шасцівугольніка, яго плошча роўна 120 см^2. Знайдзіце велічыню вугла α і плошчу аранжавага трохвугольніка.



Заданні да § 18

РАШАЕМ РАЗАМ ключавыя задачы

Задача 1. *У акружнасці з цэнтрам O праведзены дыяметр BD, праз сярэдзіну радыуса OD праведзена хорда AC, перпендыкулярная дыяметру BD* (рыс. 214). *Даказаць, што △ABC — правільны.*

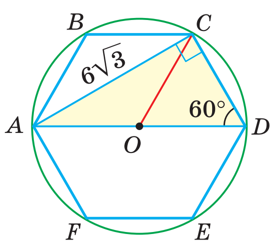


Рыс. 214

Доказ. Паколькі $OK = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OA$, то ў прамавугольным трохвугольніку AOK $\angle OAK = 30°$. У раўнабедраным трохвугольніку AOC ($OA = OC$) $\angle OCA = 30°$, $\angle AOC = 120°$. Упісаны вугал ABC роўны палавіне цэнтральнага вугла AOC, г. зн. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 60°$. Дыяметр, перпендыкулярны хордзе, дзеліць яе папалам. Таму $AK = KC$. Паколькі ў трохвугольніку ABC вышыня BK з'яўляецца і медыянай, то ён — раўнабедраны, $AB = BC$. Адсюль $\angle BAC = \angle BCA = 60°$ і $\triangle ABC$ — роўнастаронні, г. зн. правільны. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. З задачы вынікае другі спосаб пабудовы правільнага трохвугольніка, упісанага ў акружнасць: будуецца дыяметр BD, праз сярэдзіну радыуса OD праводзіцца хорда AC, перпендыкулярная дыяметру. Трохвугольнік ABC — правільны.

Задача 2. *Дадзены правільны шасцівугольнік ABCDEF, дыяганаль AC роўна* $6\sqrt{3}$. *Знайсці плошчу шасцівугольніка* (рыс. 215).



Рыс. 215

Рашэнне. Упісаны вугал ACD абапіраецца на дыяметр AD, таму ён прамы. З прамавугольнага трохвугольніка ACD: $\angle D = 60°$, $\operatorname{ctg} D = \frac{CD}{AC}$, $CD = AC \operatorname{ctg} 60° = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6$. Паколькі $S_{COD} = \frac{CD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, то $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{COD} = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.

Адказ: $54\sqrt{3}$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

264. Дадзены правільны трохвугольнік, a — яго старана, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці, h — вышыня, S — плошча. Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу.

a	6				
h		$2\sqrt{3}$			
R			2		
r				$\sqrt{6}$	
S					$16\sqrt{3}$

265. Дадзены правільны чатырохвугольнік, a — яго старана, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці. Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу.

a	4		
R		$8\sqrt{2}$	
r			$\sqrt{8}$

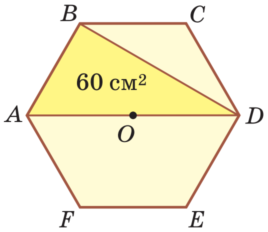
266. а) З дроту выраблены правільны трохвугольнік са стараной, роўнай 12 см. Дрот разагнулі і зрабілі з яго правільны чатырохвугольнік. Знайдзіце даўжыню стараны гэтага чатырохвугольніка.

б) З дроту выраблены правільны шасцівугольнік са стараной, роўнай 2 см. Дрот разагнулі і зрабілі з яго правільны трохвугольнік. Знайдзіце даўжыню яго стараны.

267. а) Знайдзіце плошчу правільнага шасцівугольніка са стараной, роўнай 4 см.

б) Знайдзіце перыметр правільнага шасцівугольніка, калі радыус упісанай у яго акружнасці роўны $6\sqrt{3}$ см.

268. Знайдзіце плошчу правільнага шасцівугольніка $ABCDEF$ (рыс. 216), калі плошча трохвугольніка ABD роўна 60 см^2.



Рыс. 216

269. Дадзены правільны 6-вугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

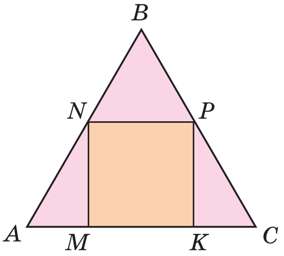
а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага 6-вугольніка, і радыус акружнасці, упісанай у гэты 6-вугольнік, калі $A_2A_4 = 4\sqrt{3}$ см.

б) Дакажыце, што адлегласць паміж прамымі A_2A_3 і A_6A_5 роўна даўжыні дыяганалі A_2A_4.

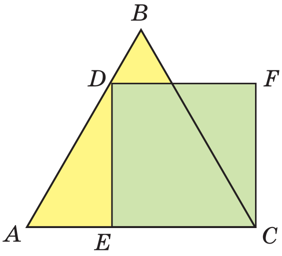
270. а) Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільнага трохвугольніка па яго вышыні h.
б) Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільнага чатырохвугольніка па яго дыяганалі d.

ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

271*. а) У правільны трохвугольнік ABC са стараной, роўнай 6, упісаны квадрат $MNPK$ (рыс. 217). Знайдзіце даўжыню стараны квадрата.
б) На рысунку 218 паказаны відарыс правільнага трохвугольніка ABC і правільнага чатырохвугольніка $EDFC$. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка, калі $FC = 3$.



Рыс. 217



Рыс. 218

272*. Знайдзіце плошчу правільнага трохвугольніка, калі дадзены:

а) радыус R яго апісанай акружнасці;
б) радыус r яго ўпісанай акружнасці.

273*. Прыдумайце алгарытм пабудовы пры дапамозе цыркуля і лінейкі квадрата па адрэзку, роўнаму суме стараны квадрата і яго дыяганалі.

274*. Каля дадзенай акружнасці апішыце пры дапамозе цыркуля і лінейкі правільны:

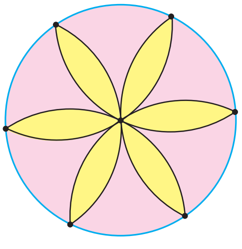
а) трохвугольнік; б) чатырохвугольнік; в) шасцівугольнік.

Мадэляванне

Дызайнер хоча вырабіць папяровыя кветкі, выразаўшы іх з кругоў, як паказана на рысунку 219.

Заданне. Дапамажыце дызайнеру: складзіце алгарытм рашэння задачы з выкарыстаннем цыркуля, нажніц і паперы.

Абгрунтуйце вашу ідэю матэматычна і праверце яе на практыцы.



Рыс. 219

Цікава ведаць. Ячэйкі пчаліных сотаў у форме правільных шасцівугольнікаў (рыс. 220) заўсёды захаплялі людзей. Нездарма пчолы лічацца аднымі з найлепшых інжынераў у свеце прыроды. Як дакладна і суразмерна падганяюць яны адну ячэйку сотаў да другой!

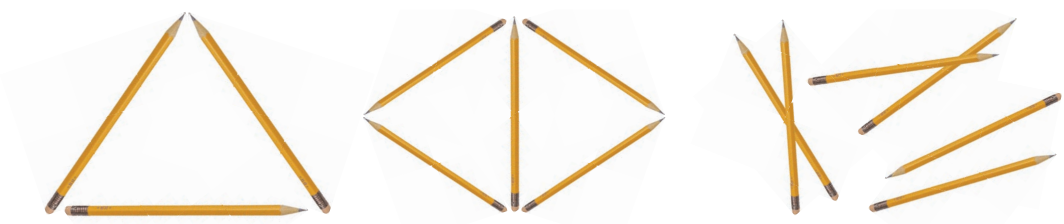
Рэгулярны ячэісты малюнак можна атрымаць з трохвугольных, квадратных або шасцівугольных ячэек. Шасцівугольныя ячэйкі з'яўляюцца найбольш эканамічнымі. На соты з такімі ячэйкамі ідзе найменшая колькасць воску. Упершыню такую асаблівасць заўважылі ў IV ст. н. э., тады ж было прапанавана меркаванне, што пчолы пры пабудове сотаў «кіруюцца матэматычным планам».

Рыс. 220

Гімнастыка розуму

З трох алоўкаў адной даўжыні можна скласці 1 правільны трохвугольнік. З пяці такіх алоўкаў можна скласці 2 правільныя трохвугольнікі (рыс. 221).

Паспрабуйце з шасці алоўкаў адной даўжыні атрымаць фігуру, якая складаецца з чатырох правільных трохвугольнікаў.



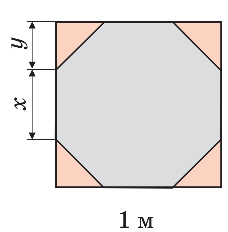
Рыс. 221

Рэальная геаметрыя

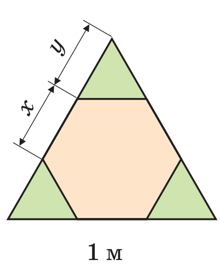
Заданне 1. Ёсць квадратны ліст гіпсакардону са стараной 1 м. З яго неабходна атрымаць правільны васьмівугольнік, абрэзаўшы вуглы (рыс. 222). Вызначце даўжыні адрэзкаў x і y. Адказ акругліце да 1 см.

Заданне 2. З ліста фанеры, які мае форму правільнага трохвугольніка са стараной 1 м, неабходна вырабіць правільны шасцівугольнік, абрэзаўшы вуглы (рыс. 223). Вызначце даўжыні адрэзкаў x і y. Адказ акругліце да 1 см.

Заўвага. Пры выкананні заданняў 1 і 2 карыстайцеся трыганаметрычнымі табліцамі і калькулятарам.



Рыс. 222



Рыс. 223