

§ 8. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка

Азначэнне. Акружнасць называецца **апісанай** каля трохвугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні.

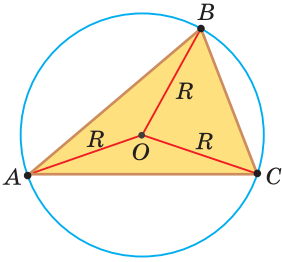


Рис. 90

На рысунку 90 паказана акружнасць з радыусам R і цэнтрам O , апісаная каля трохвугольніка ABC .

Паколькі $OA = OB = OC = R$, то цэнтр апісанай акружнасці роўнаадалены ад вяршынь трохвугольніка.

Замест слоў «акружнасць, апісаная каля трохвугольніка ABC », таксама гавораць «акружнасць, апісаная вакол трохвугольніка ABC », або «апісаная акружнасць трохвугольніка ABC ».

Тэарэма (аб акружнасці, апісанай каля трохвугольніка). Каля любога трохвугольніка можна апісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.

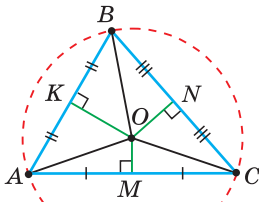
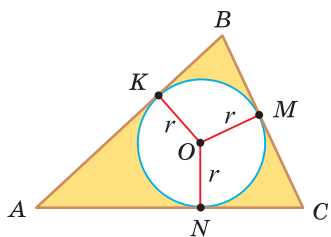


Рис. 91

Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рыс. 91). Няхай O — пункт перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон. Правядзём адрэзкі OA , OB і OC . Па ўласцівасці пасярэдняга перпендыкуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Паколькі пункт O роўнаадалены ад усіх вяршынь трохвугольніка ABC , то акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OA праходзіць праз усе вяршыні трохвугольніка ABC , г. зн. з'яўляецца яго апісанай акружнасцю. Адзінасць апісанай акружнасці дакажыце самастойна.

Заўвага. Паколькі ўсе тры пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра апісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых двух з іх.

Азначэнне. Акружнасць называецца **ўпісанай** у трохвугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон.



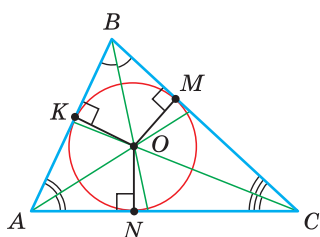
Рыс. 92

На рысунку 92 паказана акружнасць з цэнтрам O і радыусам r , упісаная ў трохвугольнік ABC ; K, M і N — пункты яе дотыку да старон трохвугольніка ABC .

Паколькі $OK = OM = ON = r$ і па ўласцівасці датычнай да акружнасці $OK \perp AB, OM \perp BC, ON \perp AC$, то цэнтр упісанай акружнасці роўнааддалены ад старон трохвугольніка.

Замест слоў «акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC », таксама гавораць «упісаная акружнасць трохвугольніка ABC ».

Тэарэма (аб акружнасці, упісанай у трохвугольнік).
 У любы трохвугольнік можна ўпісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка.



Рыс. 93

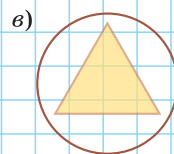
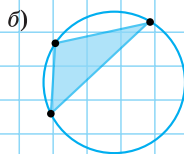
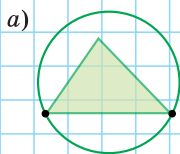
Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рыс. 93). Няхай O — пункт перасячэння яго бісектрыс. Правядзём з пункта O перпендыкуляры OK, OM і ON адпаведна да старон AB, BC і AC . Па ўласцівасці бісектрысы вугла $OK = ON, ON = OM$. Акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OK будзе праходзіць праз пункты K, M і N і датыкацца да старон AB, BC і AC у дадзеных пунктах па прымеце датычнай. Такім чынам, гэта акружнасць з'яўляецца ўпісанай у трохвугольнік ABC . Адзінасць упісанай акружнасці дакажыце самастойна.

Заўвага. Паколькі ўсе тры бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра ўпісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых дзвюх з іх.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

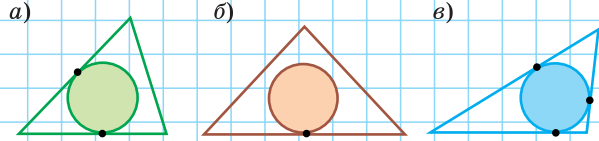
Тэст 1

На якім з рысункаў паказана акружнасць, апісаная каля трохвугольніка?

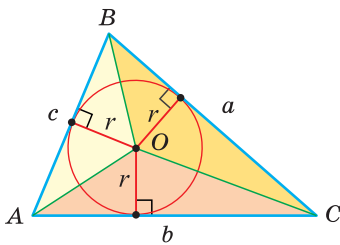


Тэст 2

На якім з рысункаў паказана акружнасць, упісаная ў трохвугольнік?



Тэарэма. Плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка, r — радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.



$$S = pr$$

Рыс. 94

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — цэнтр яго ўпісанай акружнасці (рыс. 94). Злучым адрэзкамі пункт O з вяршынямі A , B і C . Трохвугольнік ABC разаб'ецца на тры трохвугольнікі: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радыусы r , праведзеныя ў пункты дотыку, будуць вышынямі гэтых трохвугольнікаў. Плошча трохвугольніка ABC роўна суме плошчаў названых трохвугольнікаў:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr. \end{aligned}$$

Тэарэма даказана.

Вынік.

Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, можна знайсці па формуле

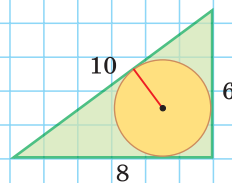
$$r = \frac{S}{p}$$

Адной з важнейшых задач дадзенай тэмы з'яўляецца задача знаходжання радыуса апісанай і радыуса ўпісанай акружнасцей дадзенага трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3**.

Тэст 3

Выкарыстаўшы формулу $S = pr$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 6 см, 8 см, 10 см.

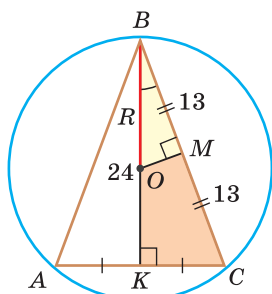




Заданні да § 8

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC , у якога $AB = BC = 26$ см, вышыня $BK = 24$ см (рыс. 95).

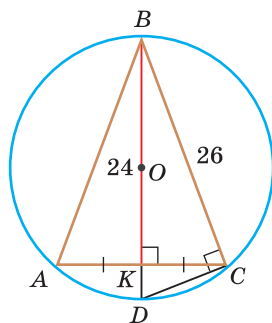


Рыс. 95

Рашэнне. *Спосаб 1* (метада падобнасці). Цэнтр апісанай акружнасці ляжыць на перасячэнні перасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка. Правядзём перасярэднія перпендыкуляры да старон AC і BC , якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры апісанай акружнасці. Паколькі ў раўнабедраным трохвугольніку вышыня, праведзеная да асновы, з'яўляецца медыянай, то BK — перасярэдні перпендыкуляр да стараны AC . Няхай MO — перасярэдні перпендыкуляр да стараны BC . Тады $BM = 13$ см, $BO = R$ — шуканы радыус. Паколькі $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (як прамавугольныя з агульным вострым вуглом CBK), то

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}, \quad \frac{13}{R} = \frac{24}{26}, \quad \text{адкуль } R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14 \frac{1}{12} \text{ (см).}$$

Спосаб 2 (трыганаметрычны метада). З $\triangle OBM$ (гл. рыс. 95) $\cos \angle OBM = \frac{BM}{BO}$, з $\triangle BKC$ $\cos \angle CBK = \frac{BK}{BC}$, адкуль $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.



Рыс. 96

*Спосаб 3** (сярэдняя прапарцыянальная). Прадоўжым вышыню BK да перасячэння з апісанай акружнасцю ў пункце D (рыс. 96). Паколькі цэнтр апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка ляжыць на прамой BK (гл. спосаб 1), то $BD = 2R$ — дыяметр дадзенай акружнасці. У прамавугольным трохвугольніку BCD ($\angle BCD = 90^\circ$ як упісаны, які абпіраецца на дыяметр) катэт BC ёсць сярэдняя прапарцыянальная паміж гіпатэнузай BD і праекцыяй BK катэта BC на гіпатэнузу. Таму $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$, адкуль $R = 14 \frac{1}{12}$ (см).

Адказ: $14 \frac{1}{12}$ см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 1 вынікае ўласцівасць: «Цэнтр акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы, або на яе прадаўжэнні».

Правільнае і адваротнае сцверджанне: «Калі *цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць на вышыні трохвугольніка або на яе прадаўжэнні, то гэты трохвугольнік раўнабедраны*».

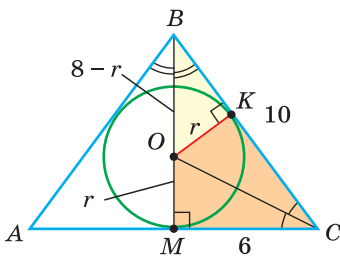
Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Карысна запомніць!

Калі ў ключавой задачы 1 бакавую старану абазначыць b , а вышыню, праведзеную да асновы, — h_a , то атрымаецца прапорцыя $\frac{b}{2} = \frac{h_a}{R}$. Адсюль вынікае зручная формула для знаходжання радыуса акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка:

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Задача 2. Знайсці радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC , у якога $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.



Рыс. 97

Рашэнне. *Спосаб 1* (метад падобнасці). Цэнтр упісанай акружнасці знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка. Правядзём у трохвугольніку ABC бісектрысы з вяршынь B і C , якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры ўпісанай акружнасці (рыс. 97). Бісектрыса BM , праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка ABC , будзе яго вышыняй і медыянай, прамень CO — бісектрыса вугла C , $OM = r$ — шуканы радыус упісанай акружнасці. Паколькі $AM = MC = 6$ см,

то з $\triangle BMC$ па тэарэме Піфагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), адкуль $BO = BM - OM = 8 - r$ (см). Правядзём радыус OK у пункт дотыку акружнасці са стараной BC , $OK \perp BC$. З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў BKO і BMC ($\angle MBC$ — агульны) вынікае: $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Тады $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $5r = 3(8-r)$, $8r = 24$, $r = 3$ (см).

Спосаб 2 (трыганаметрычны метада). З $\triangle OBK$ (гл. рыс. 97) $\sin \angle OBK = \frac{OK}{OB}$, з $\triangle BMC$ $\sin \angle MBC = \frac{MC}{BC}$, адкуль $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.

Спосаб 3 (уласцівасць бісектрысы трохвугольніка). CO — бісектрыса $\triangle BMC$. Вядома, што бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам. Таму $\frac{OM}{OB} = \frac{MC}{BC}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, адкуль $r = 3$ (см).

Спосаб 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см²);
 $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{10+10+12}{2} = 16$ (см). З формулы плошчы
 трохвугольніка $S = pr$ вынікае: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).

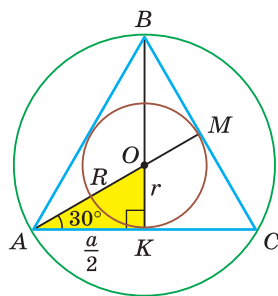
Адказ: 3 см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 2 вынікае ўласцівасць: «Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы».

Правільнае і адваротнае сцверджанне: «Калі цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць на вышыні трохвугольніка, то гэты трохвугольнік раўнабедраны».

Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Задача 3. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са стараной a . Знайсці радыус R яго апісанай акружнасці і радыус r яго ўпісанай акружнасці.



Рыс. 98

Рашэнне. Спосаб 1 (трыганаметрычны метада). Паколькі ў роўнастароннім трохвугольніку бісектрысы з'яўляюцца і вышынямі, і медыянамі, то яго бісектрысы ляжаць на пасярэдніх перпендыкулярах да старон трохвугольніка. Таму ў роўнастароннім трохвугольніку цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей супадаюць.

Разгледзім роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной a , у якога вышыні AM і BK перасякаюцца ў пункце O — цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей (рыс. 98). Тады $OA = OB = R$ — радыусы апісанай, $OK = OM = r$ — радыусы ўпісанай акружнасці. Паколькі AM — бісектрыса і $\angle BAC = 60^\circ$, то $\angle OAK = 30^\circ$. Паколькі BK — вышыня і медыяна, то

$$AK = \frac{a}{2}. \text{ З } \triangle AKO \cos 30^\circ = \frac{AK}{AO}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}, \text{ адкуль } R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

У $\triangle AKO$ катэт OK ляжыць супрць вугла ў 30° , таму $OK = \frac{1}{2}AO$,
 $r = \frac{1}{2}R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Спосаб 2 (уласцівасць медыян). Паколькі AM і BK — медыяны трохвугольніка ABC (гл. рыс. 98), то па ўласцівасці медыян $BO : OK = 2 : 1$. Вышыню роўнастаронняга трохвугольніка можна знайсці па формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Адкуль $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,
 $r = OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Адказ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

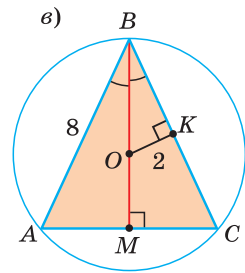
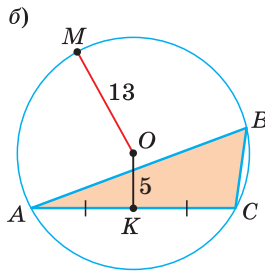
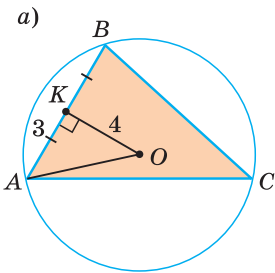
Карысна запомніць!

Паколькі радыус апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $a = R\sqrt{3}$. Значыць, старана роўнастаронняга трохвугольніка ў $\sqrt{3}$ раза большая за радыус яго апісанай акружнасці. Каб знайсці радыус R апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка, трэба старану a падзяліць на $\sqrt{3}$, а каб знайсці яго старану a , трэба радыус R памножыць на $\sqrt{3}$. Радыус упісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $r = \frac{1}{2}R$.

**РАШАЕМ
САМАСТОЙНА**

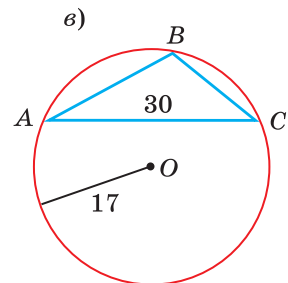
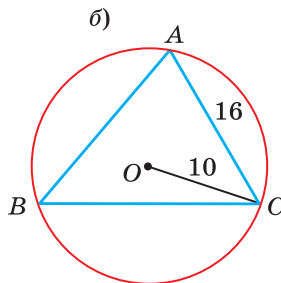
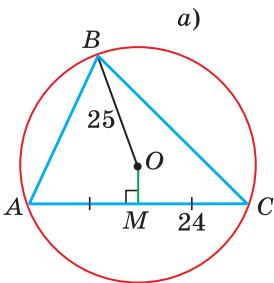
86. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O .

- Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, а).
- Знайдзіце старану AC , калі K — яе сярэдзіна (рыс. 99, б).
- Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, в).



Рыс. 99

87. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць. Па даных на рысунках 100, а)–в) знайдзіце адлегласць ад цэнтра O акружнасці да прамой AC .

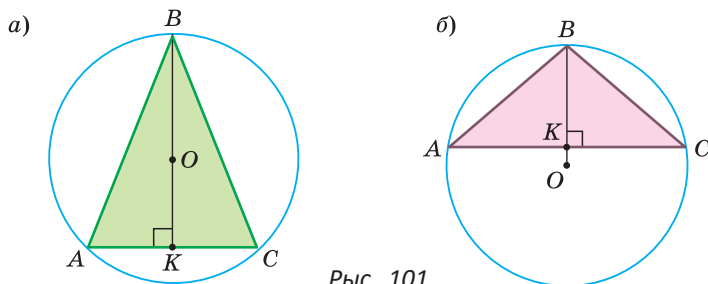


Рыс. 100

88. Выкарыстаўшы ключавую задачу 1 (с. 60), знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і вышынёй BK , калі:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рыс. 101, а);

б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рыс. 101, б).



Рыс. 101

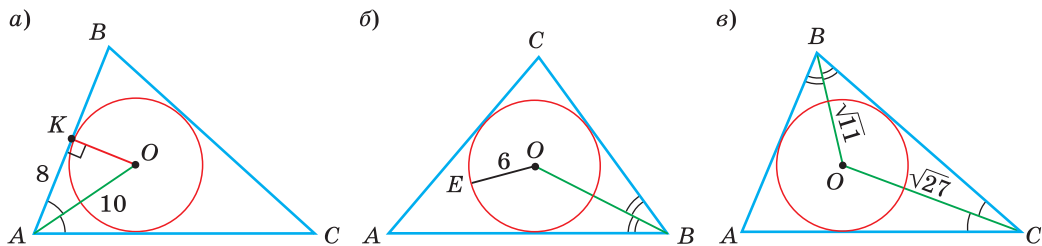
89. Радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, роўны 5 см, вышыня, праведзеная да яго асновы, роўна 8 см. Знайдзіце плошчу дадзенага трохвугольніка.

90. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O .

а) Па рысунку 102, а) вызначце радыус упісанай акружнасці.

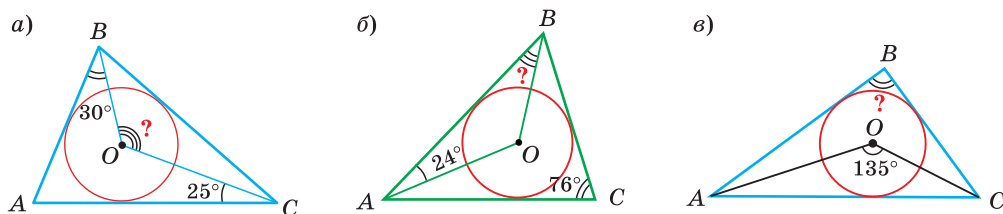
б) Па рысунку 102, б) вызначце даўжыню адрэзка OB , калі $\angle ABC = 60^\circ$.

в) Па рысунку 102, в) вызначце даўжыню стараны BC , калі дыяметр упісанай акружнасці роўны $\sqrt{8}$.



Рыс. 102

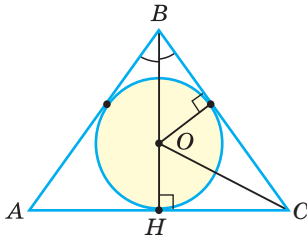
91. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O . Па даных на рысунках 103, а)–в) вызначце велічыню вугла, абазначанага пыталнікам.



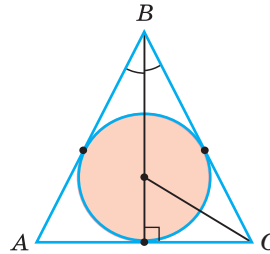
Рыс. 103

92. а) Выкарыстаўшы ключавую задачу 2 (с. 61), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 6$ см і вышынёй $BH = 4$ см, праведзенай да асновы (рыс. 104).

б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 10$ см і бакавой старонай $AB = 13$ см (рыс. 105).



Рыс. 104



Рыс. 105

93. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са старонай, роўнай $4\sqrt{3}$ см. Вылічыце:

- радыус апісанай акружнасці гэтага трохвугольніка;
- радыус упісанай акружнасці гэтага трохвугольніка.

94. а) Знайдзіце радыус R апісанай і радыус r упісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка, калі яго вышыня $h = 12$ см.

б) Знайдзіце плошчу роўнастаронняга трохвугольніка, калі радыус R яго апісанай акружнасці роўны 2 см.

95. а) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі апішыце акружнасць каля тупавугольнага трохвугольніка.

б) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі ўпішыце акружнасць у прамавугольны трохвугольнік.

96. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC , $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Вызначце:

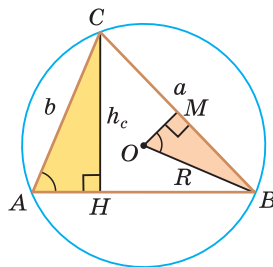
- радыус яго апісанай акружнасці;
- радыус яго ўпісанай акружнасці.

97. а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, у якога перыметр роўны 18 см, а радыус упісанай акружнасці — 2 см.

б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, плошча якога роўна 45 см^2 , а перыметр — 30 см.

98. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай AC , O_1 — цэнтр апісанай, O_2 — цэнтр упісанай акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка O_1O_2 , калі $AB = 20$ см, вышыня $BH = 16$ см.

99. а) Акружнасць, упісаная ў раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць пунктам дотыку яго бакавую старану на адрэзкі, роўныя 6 см і 4 см, лічачы ад асновы. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік.
- б) Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць яго вышыню, праведзеную да асновы, у адносіне 4 : 5, лічачы ад асновы. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі яго бакавая старана роўна 20 см.
100. Косінус вугла пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўны 0,8, перыметр трохвугольніка роўны 54 см. Знайдзіце:
- а) радыус яго ўпісанай акружнасці;
- б) радыус яго апісанай акружнасці.
101. У трохвугольнік ABC упісаная акружнасць з цэнтрам O , якая датыкаецца да яго старон AB , BC і AC адпаведна ў пунктах M , N і K . Знайдзіце:
- а) $\angle MNK$, калі $\angle A = 70^\circ$;
- б) $\angle AOB$, калі $\angle KMN = 64^\circ$.



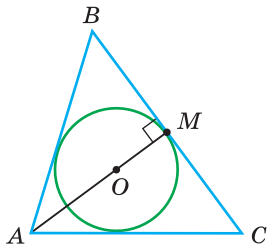
Рыс. 106

102. Акружнасць з цэнтрам у пункце O апісаная каля трохвугольніка ABC (рыс. 106), $OB = R$ — радыус акружнасці, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — вышыня, $OM \perp BC$. Дакажыце, што:
- а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.

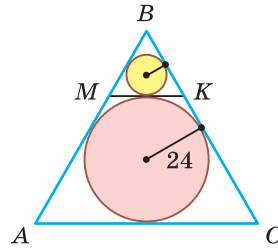


ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

- 103*. а) У трохвугольніку ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 6$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.
- б) У трохвугольніку ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, вышыня $BH = 8$ см. Знайдзіце радыус R апісанай акружнасці.
- 104*. У трохвугольніку ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік, датыкаецца да дадзеных старон адпаведна ў пунктах M , N , K . Знайдзіце:
- а) $AK + MB + NC$; б) даўжыню адрэзка AK .
- 105*. У трохвугольнік ABC упісаная акружнасць з цэнтрам у пункце O (рыс. 107), вышыня AM праходзіць праз пункт O , $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці.

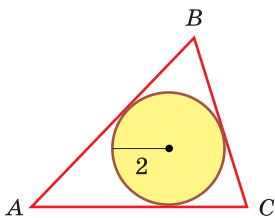


Рыс. 107



Рыс. 108

- 106*.** У роўнастаронні трохвугольнік ABC упісана акружнасць, радыус якой роўны 24. Адрэзак MK датыкаецца да гэтай акружнасці і паралельны старане AC (рыс. 108). Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік MBK .
- 107*.** Дакажыце, што калі цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка супадаюць, то гэты трохвугольнік роўнастаронні.
- 108*.** а) Дакажыце, што каля дадзенага трохвугольніка можна апісаць толькі адну акружнасць.
б) Дакажыце, што ў дадзены трохвугольнік можна ўпісаць толькі адну акружнасць.
- 109*.** Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC , H — пункт перасячэння яго вышынь (артацэнтр), O — цэнтр апісанай акружнасці. Пункты O , H , A і C ляжаць на адной акружнасці. Знайдзіце велічыню вугла B .



Рыс. 109

Гімнастыка розуму

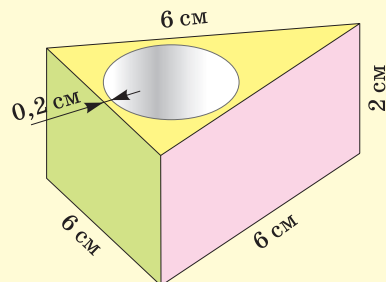
Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC (рыс. 109), роўны 2 см, плошча трохвугольніка $S = 2019$ см². Знайдзіце вусна перыметр P трохвугольніка ABC .

Якую ўласцівасць, на ваш погляд, мае трохвугольнік, у якога радыус упісанай акружнасці роўны 2? Абгрунтуйце ваша меркаванне.

Геаметрыя 3D

Загатоўка ўяўляе сабой правільную трохвугольную прызму вышынёй 2 см, у аснове якой ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной 6 см (рыс. 110). У цэнтры загатоўкі трэба зрабіць цыліндрычную адтуліну. Адлегласць ад акружнасці адтуліны да стараны асновы роўна 0,2 см.

Заданне 1. Знайдзіце (акругліўшы вынік да 1 мм) дыяметр свердла для свідравання патрэбнай адтуліны.



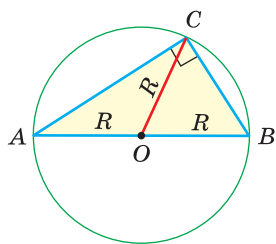
Рыс. 110

Заданне 2. Па формуле аб'ёму цыліндра $V_{ц} = \pi R^2 H$, дзе R — радыус асновы, H — вышыня цыліндра, знайдзіце аб'ём цыліндрычнай адтуліны. Прыміце $\pi \approx 3,14$. Адказ акругліце да 1 см^3 .

Заданне 3. Улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны здабытку яе плошчы асновы на вышыню, г. зн. $V_{пр} = S_{асн} \cdot H$, вылічыце, колькі працэнтаў складае аб'ём цыліндрычнай адтуліны ад аб'ёму прызмы. Адказ акругліце да 1% .

§ 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

Тэарэма. Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы, г. зн. $R = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.



$$R = \frac{c}{2}$$

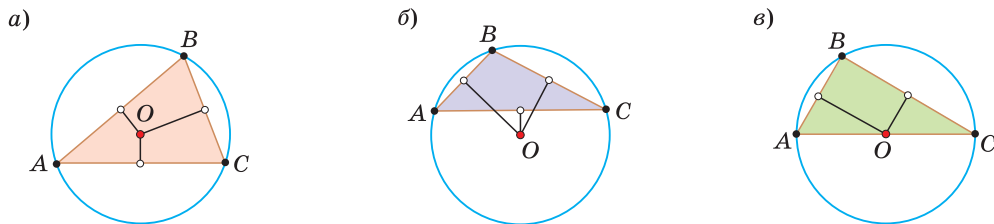
Рыс. 111

Доказ. Правядзём у прамавугольным трохвугольніку ABC медыяну CO да гіпатэнузы AB (рыс. 111). Паколькі медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, то $OC = OA = OB$. Тады сярэдзіна гіпатэнузы — пункт O — роўнааддалены ад пунктаў A , B і C і таму з'яўляецца цэнтрам апісанай акружнасці трохвугольніка ABC . Радыус гэтай акружнасці $R = OA = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.

Тэарэма даказана.

Заўвага. Таксама можна даказаць, што пасярэднія перпендыкуляры да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка перасякаюцца на сярэдзіне гіпатэнузы.

Адзначым, што ў востравугольнага трохвугольніка цэнтр апісанай акружнасці ляжыць унутры трохвугольніка (рыс. 112, а), у тупавугольнага — па-за трохвугольнікам (рыс. 112, б), у прамавугольнага — на сярэдзіне гіпатэнузы (рыс. 112, в). Абгрунтуйце першыя два сцвержэнні самастойна.



Рыс. 112