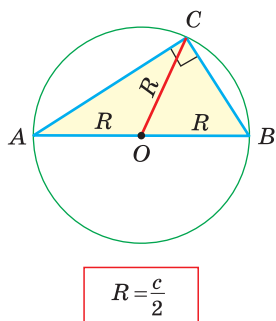


Заданне 2. Па формуле аб'ёму цыліндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, дзе R — радыус асновы, H — вышыня цыліндра, знайдзіце аб'ём цыліндрычнай адтуліны. Прыміце $\pi \approx 3,14$. Адказ акругліце да 1 см^3 .

Заданне 3. Улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны здабытку яе плошчы асновы на вышыню, г. зн. $V_{\text{пр}} = S_{\text{асн}} \cdot H$, вылічыце, колькі працэнтаў складае аб'ём цыліндрычнай адтуліны ад аб'ёму прызмы. Адказ акругліце да 1% .

§ 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

Тэарэма. Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы, г. зн. $R = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.



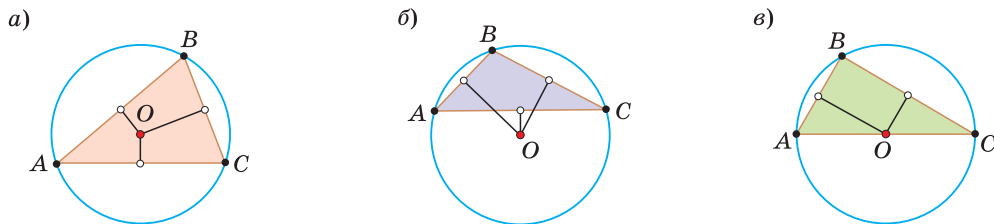
Рыс. 111

Доказ. Правядзём у прамавугольным трохвугольніку ABC медыяну CO да гіпатэнузы AB (рыс. 111). Паколькі медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, то $OC = OA = OB$. Тады сярэдзіна гіпатэнузы — пункт O — роўнааддалены ад пунктаў A , B і C і таму з'яўляецца цэнтрам апісанай акружнасці трохвугольніка ABC . Радыус гэтай акружнасці $R = OA = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.

Тэарэма даказана.

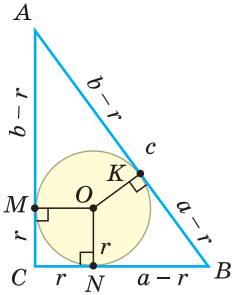
Заўвага. Таксама можна даказаць, што пасярэднія перпендыкуляры да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка перасякаюцца на сярэдзіне гіпатэнузы.

Адзначым, што ў востравугольнага трохвугольніка цэнтр апісанай акружнасці ляжыць унутры трохвугольніка (рыс. 112, а), у тупавугольнага — па-за трохвугольнікам (рыс. 112, б), у прамавугольнага — на сярэдзіне гіпатэнузы (рыс. 112, в). Абгрунтуйце першыя два сцверджанні самастойна.



Рыс. 112

Тэарэма. Радывус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, можна знайсці па формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, дзе r — шуканы радывус, a і b — катэты, c — гіпатэнуза трохвугольніка.



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Рыс. 113

Доказ. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC з катэтамі $BC = a$, $AC = b$ і гіпатэнузай $AB = c$. Няхай упісаная ў трохвугольнік акружнасць з цэнтрам O і радывусам r датыкаецца да старон трохвугольніка ў пунктах M , N і K (рыс. 113). Правядзём радывусы ў пункты дотыку і атрымаем: $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, $OK \perp AB$. Чатырохвугольнік $CMON$ — квадрат, паколькі ў яго ўсе вуглы прамыя і $OM = ON = r$. Тады $CM = CN = r$, $NB = a - r$, $MA = b - r$. Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $BK = BN = a - r$, $AK = AM = b - r$. Але $BK + AK = AB$, г. зн. $(a - r) + (b - r) = c$, $a + b - 2r = c$, адкуль $r = \frac{a+b-c}{2}$. Тэарэма даказана.

Вынік. $r = p - c$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка.

Доказ. Пераўтварым формулу радывуса ўпісанай акружнасці:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула $r = p - c$ у спалучэнні з формуламі $S = pr$ і $R = \frac{c}{2}$

дае магчымасць рашаць многія задачы, звязаныя з прамавугольным трохвугольнікам, алгебраічным метадам.

Прыклад. Дадзены прамавугольны трохвугольнік, $S = 24$, $R = 5$. Знайсці r .

Рашэнне. Паколькі $r = p - c$, а $R = \frac{c}{2}$, то $p = r + c = r + 2R = r + 10$.

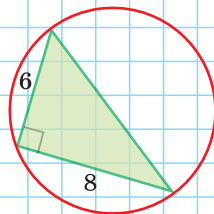
З формулы $S = pr$ вынікае $24 = (r + 10)r$, $r^2 + 10r - 24 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $r_1 = 2$, $r_2 = -12$ — пабочны карань.

Адказ: $r = 2$.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

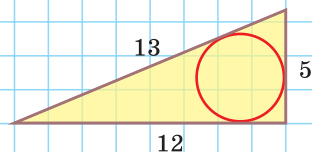
Тэст 1

Знайдзіце радывус акружнасці, апісанай каля паказанага на рысунку трохвугольніка.



Тэст 2

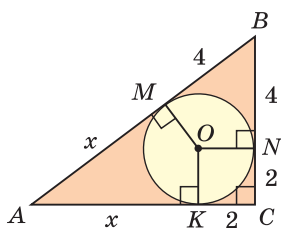
Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у паказаны на рысунку трохвугольнік.



Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, у якога адзін з катэтаў роўны 6, а радыус упісанай акружнасці роўны 2.



Рыс. 114

Рашэнне. *Спосаб 1* (геаметрычны). Няхай у трохвугольніку ABC , дзе $\angle C = 90^\circ$, $BC = 6$, $r = 2$ — радыус упісанай акружнасці (рыс. 114). Правядзём з цэнтра O ўпісанай акружнасці перпендыкуляры OK , OM і ON да старон трохвугольніка, якія будуць радыусамі ўпісанай акружнасці. Паколькі $KONC$ — квадрат, то $NC = KC = r = 2$, $BN = 6 - 2 = 4$.

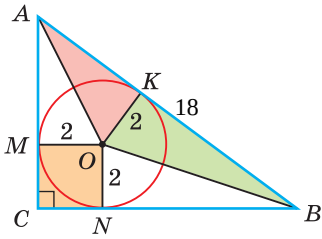
Па ўласцівасці датычных $BM = BN = 4$, $AM = AK = x$. Тады $AC = x + 2$, $AB = x + 4$. Па тэарэме Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$, $4x = 24$, $x = 6$. Такім чынам, $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$. Радыус апісанай акружнасці $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Спосаб 2 (алгебраічны). Падставіўшы ў формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ значэнні $r = 2$ і $a = 6$, атрымаем $c = b + 2$. Па тэарэме Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$, г. зн. $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$, $b = 8$. Тады $c = 10$, $R = \frac{c}{2} = 5$.

Адказ: 5.

Задача 2*. Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка $c = 18$, радыус упісанай у яго акружнасці $r = 2$. Знайсці плошчу трохвугольніка.

Рашэнне. *Спосаб 1* (геаметрычны). Няхай у $\triangle ABC$ гіпатэнуза $AB = c = 18$, O — цэнтр упісанай акружнасці, OK , OM , ON — яе радыусы, праведзеныя ў пункты дотыку (рыс. 115). Паколькі $OM \perp AC$, $ON \perp BC$,



Рыс. 115

$OK \perp AB$ і $OM = ON$, то $CMON$ — квадрат са стараной, роўнай радыусу r упісанай акружнасці, $OK = r$ — вышыня $\triangle AOB$. Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то $AK = AM$, $BK = BN$. Адсюль $\triangle AKO = \triangle AMO$, $\triangle BKO = \triangle BNO$ па катэце і гіпатэнузе.

Плошча $\triangle ABC$ роўна суме падвоенай плошчы $\triangle AOB$ і плошчы квадрата $CMON$, г. зн.

$$S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OK + MO^2 = c \cdot r + r^2 = 18 \cdot 2 + 2^2 = 40.$$

Спосаб 2 (алгебраічны). З формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ вынікае $2 = \frac{a+b-18}{2}$,

$a + b = 22$. Узвядзём абедзве часткі роўнасці ў квадрат: $(a + b)^2 = 22^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 484$. Паколькі $a^2 + b^2 = c^2$ і $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то $c^2 + 4S = 484$, $64 + 4S = 484$, $S = 40$.

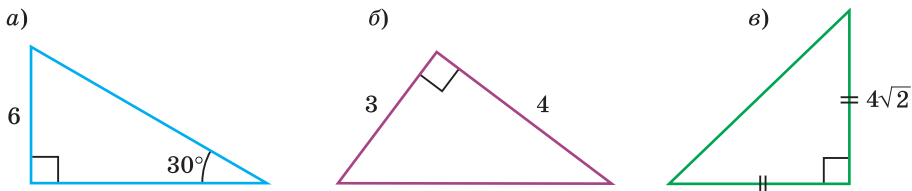
Спосаб 3 (алгебраічны). З формулы $r = p - c$ вынікае, што $p = r + c$. З формулы $S = pr$ вынікае, што $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18) \cdot 2 = 40$.

Адказ: 40.



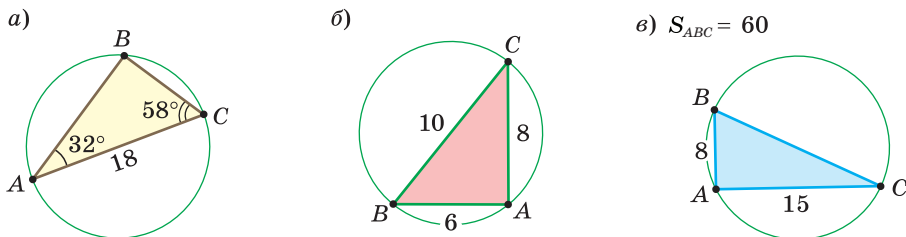
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

110. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 116, а)—в), знайдзіце радыус апісанай акружнасці трохвугольніка.



Рыс. 116

111. Па даных на рысунках 117, а)—в) знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC .



Рыс. 117

112. Знайдзіце радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі:

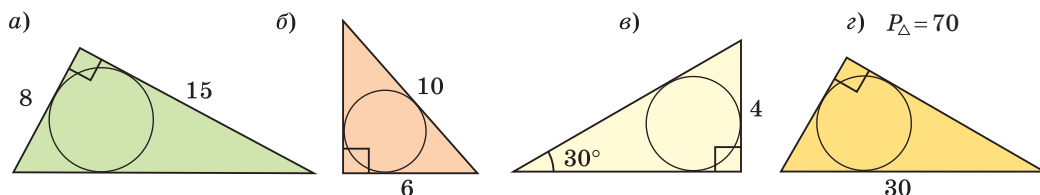
- а) 12 см і 16 см; б) 18 м і 24 м;
в) 14 дм і 48 дм; г) 1 км і 2 км.

113. а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка ABC , калі ў яго адзін з катэтаў роўны 6 см, а радыус апісанай акружнасці — 5 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, адзін з катэтаў якога роўны 8 см, а сінус процілеглага яму вугла роўны $\frac{2}{3}$.

114. Выкарыстаўшы формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік з катэтамі a і b і гіпатэнузай c , калі:

- а) $a = 3$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 12$ дм;
в) $a = 7$ см, $c = 25$ см; г) $a = 4$ м, $c = 4\sqrt{2}$ м.

115. Выкарыстаўшы даныя рысункаў 118, а)–г), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.



Рыс. 118

116. Адлегласць ад цэнтра акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, да гіпатэнузы роўна 6 см. Знайдзіце адлегласць ад гэтага цэнтра да вяршыні прамога вугла.

117. Знайдзіце катэты прамавугольнага трохвугольніка, калі ўпісаная акружнасць пунктам дотыку дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 5 см і 12 см.

118. Радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка роўны 13 см, упісанай — 4 см. Знайдзіце перыметр і плошчу трохвугольніка.



**ПАВЫШАНЫ
ЎЗРОВЕНЬ**

119*. а) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна 24 см^2 , радыус яго ўпісанай акружнасці роўны 2 см. Знайдзіце дыяметр апісанай акружнасці трохвугольніка.

б) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна 30 см^2 , радыус яго апісанай акружнасці роўны $6,5 \text{ см}$. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.

120*. Знайдзіце перыметр прамавугольнага трохвугольніка, у якога гіпатэнуза $c = 14 \text{ см}$, а радыус упісанай акружнасці $r = 1 \text{ см}$.

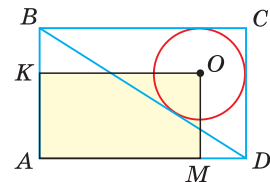
121*. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка са старанамі, роўнымі 12 см , 16 см і 20 см .

122*. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 9 см і 16 см . Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у дадзены трохвугольнік.

123*. а) У прамавугольным трохвугольніку пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 3 см і 4 см . Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

б) Дакажыце, што калі пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя m і n , то плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = mn$.

124*. $ABCD$ — прамавугольнік (рыс. 119), у трохвугольнік BCD упісана акружнасць з цэнтрам O . Дакажыце, што плошча прамавугольніка $AKOM$ роўна палавіне плошчы прамавугольніка $ABCD$.



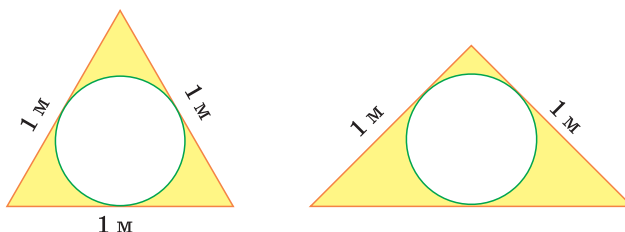
Рыс. 119



Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце *формулу Эйлера*, якая звязвае адлегласць паміж цэнтрамі ўпісанай і апісанай акружнасцей з іх радыусамі.

Рэальная геаметрыя

Ёсць два лісты ДСП (драўнінна-стружкавай пліты). Адзін з іх мае форму роўнастаронняга трохвугольніка са стараной 1 м , другі — форму прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 1 м (рыс. 120). З кожнага ліста неабходна выразаць па адным крузе найбольшага дыяметра. Вызначце, з якога ліста будзе выразаны круг большага дыяметра і якім у гэтым выпадку будзе працэнт адходаў, калі вядома, што плошчу круга можна знайсці па формуле $S = \pi R^2$, дзе $\pi \approx 3,14$.



Рыс. 120



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка.
2. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай, а дзе — цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка і чаму роўны яе радыус R .
4. Формулу радыуса r акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.
5. Формулу плошчы трохвугольніка, звязаную з радыусам r упісанай акружнасці.

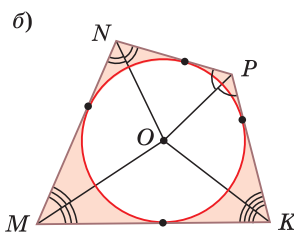
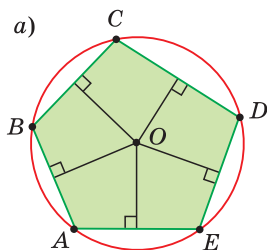
Умеем

1. Знаходзіць цэнтр апісанай акружнасці трохвугольніка.
2. Знаходзіць цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Выводзіць формулу $S = pr$.
4. Даказваць, што $R = \frac{c}{2}$ для прамавугольнага трохвугольніка.
5. Выводзіць формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ для прамавугольнага трохвугольніка.

§ 10. Упісаныя і апісаныя чатырхвугольнікі

Азначэнне. *Акружнасць называецца **апісанай** каля многавугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні. Пры гэтым многавугольнік называецца **ўпісаным** у акружнасць. Акружнасць называецца **ўпісанай** у многавугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон. Пры гэтым многавугольнік называецца **апісаным** каля акружнасці.*

Пяцівугольнік $ABCDE$ (рыс. 121, а) з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, а чатырхвугольнік $MNPK$ (рыс. 121, б) — апісаным каля акружнасці.



Рыс. 121