



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

- 50*.** а) Косінус аднаго з сумежных вуглоў роўны $-0,3$. Знайдзіце косінус другога вугла.
 б) Сінус тупога вугла паралелаграма роўны $0,8$. Знайдзіце тангенс вострага вугла паралелаграма.
- 51*.** Знайдзіце $\sin \alpha + \cos \alpha$, калі вугал α роўны:
 а) 0° ; б) 90° ; в) 180° .
- 52*.** Выкарыстаўшы адзінкавую паўакружнасць, дакажыце, што пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго сінус павялічваецца ад 0 да 1 , косінус памяншаецца ад 1 да 0 ; пры павелічэнні вугла ад 90° да 180° яго сінус памяншаецца ад 1 да 0 , косінус памяншаецца ад 0 да -1 .
- 53*.** Дакажыце, што для вуглоў трохвугольніка ABC правільная роўнасць:
 а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гімнастыка розуму

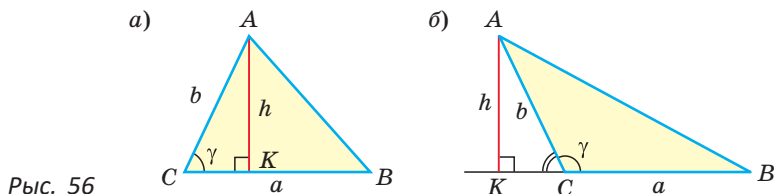
- Знайдзіце значэнне выразу $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$.
- Знайдзіце значэнне выразу $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.

§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

Трыганаметрычныя функцыі дазваляюць атрымаць формулы для вылічэння плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма. Сфармулюем іх у выглядзе дзвюх тэарэм.

Тэарэма. Плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх яго старон на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC стораны $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — востры, $AK = h$ — вышыня (рыс. 56, а).



З прамавугольнага трохвугольніка AKC $\sin \gamma = \frac{h}{b}$, $h = b \sin \gamma$. Тады $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$.

Калі вугал γ тупы (рыс. 56, б), то $\angle ACK = 180^\circ - \gamma$ — востры. З прамавугольнага трохвугольніка AKC вынікае, што $h = b \sin(180^\circ - \gamma)$. Паколькі $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$.

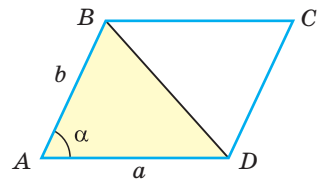
Калі $\gamma = 90^\circ$, то $\triangle ABC$ — прамавугольны з катэтамі a і b . Улічыўшы, што $\sin 90^\circ = 1$, атрымаем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма. Плошча паралелаграма роўна здабытку дзвюх яго суседніх старон на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$.

Выкарыстаўшы рысунак 57, дакажыце гэту тэарэму самастойна.

Заўвага. Калі $\alpha = 90^\circ$, то паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам. Яго плошча $S = ab \sin 90^\circ = ab$, паколькі $\sin 90^\circ = 1$. Такім чынам, формула плошчы прамавугольніка $S = ab$ — прыватны выпадак формулы плошчы паралелаграма $S = ab \sin \alpha$.

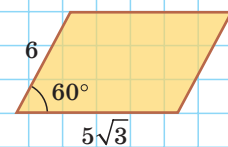
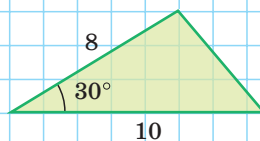


Рыс. 57

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Знайдзіце плошчы трохвугольніка і паралелаграма, паказаных на рысунку.



Вядома, што слова «сінус» у перакладзе з лацінскай мовы мае мноства значэнняў: выгіб, дуга, пазуха, бухта, упадзіна, заліў, хорда, клопат і пяшчотная любоў. Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце:

- якое са значэнняў найбольш блізкае да матэматычнага паняцця «сінуса»;
- якія са значэнняў адносяцца да медыцыны і чаму насмарк урачы часам называюць сінусітам.

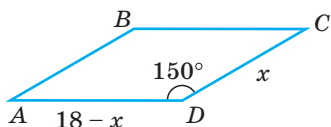


Задання до § 5

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Дадзены паралелаграм $ABCD$, плошча якога 40 см^2 , а перыметр 36 см . Знайсці стораны паралелаграма, калі яго вугал D роўны 150° (рыс. 58).



Рыс. 58

Рашэнне. Паўперыметр паралелаграма роўны 18 см . Калі $CD = x \text{ см}$, то $AD = (18 - x) \text{ см}$. Тады $S_{ABCD} = CD \cdot AD \cdot \sin D = x(18 - x) \cdot \sin 150^\circ \text{ см}^2$.

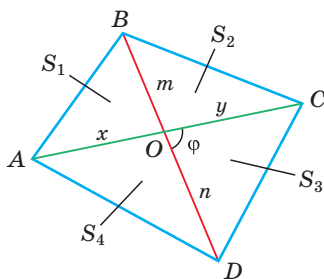
Паколькі $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x(18 - x) \text{ см}^2$.

Па ўмове $S_{ABCD} = 40 \text{ см}^2$. Складзём і рэшым ураўненне:

$\frac{1}{2}x(18 - x) = 40$, $x^2 - 18x + 80 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = 8$, $x_2 = 10$ — карані. Калі $CD = 8 \text{ см}$, то $AD = 10 \text{ см}$, калі $CD = 10 \text{ см}$, то $AD = 8 \text{ см}$.

Адказ: 8 см , 10 см .

Задача 2*. Даказаць, што плошча выпуклага чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку яго дыяганалей на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$.



Рыс. 59

Доказ. Няхай дыяганалі $AC = d_1$ і $BD = d_2$ чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 59) перасякаюцца ў пункце O , $\angle COD = \varphi$, $S_1 = S_{AOB}$, $S_2 = S_{BOC}$, $S_3 = S_{COD}$, $S_4 = S_{AOD}$. Дакажам, што $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$. Абзначым $AO = x$, $OC = y$, $BO = m$, $OD = n$. Заўважым, што $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ як вертыкальныя, $\angle BOC = 180^\circ - \angle COD$ па ўласцівасці сумежных вуглоў. Таму $\sin \angle AOB = \sin \angle COD = \sin \varphi$, $\sin \angle BOC = \sin \angle AOD = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$. Па формуле плошчы трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ атрымваем:

$$S_1 = \frac{1}{2}xm \sin \angle AOB = \frac{1}{2}xm \sin \varphi, \quad S_2 = \frac{1}{2}ym \sin \angle BOC = \frac{1}{2}ym \sin \varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}yn \sin \angle COD = \frac{1}{2}yn \sin \varphi, \quad S_4 = \frac{1}{2}xn \sin \angle AOD = \frac{1}{2}xn \sin \varphi.$$

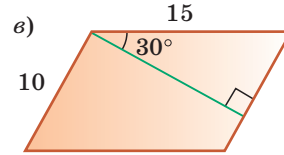
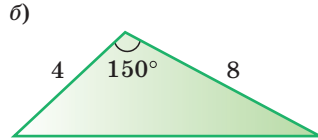
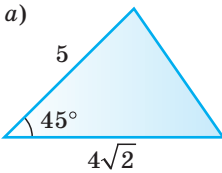
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}xm \sin \varphi + \frac{1}{2}ym \sin \varphi + \frac{1}{2}yn \sin \varphi + \frac{1}{2}xn \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2}(m(x + y) + n(x + y)) \sin \varphi = \frac{1}{2}(x + y)(m + n) \sin \varphi = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Сцверджанне даказана.



РАШАЕМ САМАСТОЙНА

54. Выкарыстаўшы формулы $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ і $S_{\text{пар}} = ab \sin \alpha$, знайдзіце плошчы трохвугольнікаў і паралелаграма, паказаных на рысунку 60.



Рыс. 60

55. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , калі:
- $AB = 6,5$ см, $BC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle B = 120^\circ$;
 - $AC = 16$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A + \angle B = 135^\circ$.
56. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$, калі:
- $AB = 4,2$ см, $AD = 6$ см, $\sin C = \frac{2}{3}$;
 - $P_{ABCD} = 48$ см, $BC = 13$ см, $\cos B = -\frac{12}{13}$.
57. а) Плошча паралелаграма роўна $18\sqrt{3}$ см², адна з яго старон на 5 см большая за другую, а адзін з вуглоў роўны 60° . Знайдзіце перыметр паралелаграма.
 б) Стораны паралелаграма адносяцца як 3 : 5, плошча роўна 30 см², а тупы вугал паралелаграма роўны 150° . Знайдзіце перыметр паралелаграма.
58. а) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной, роўнай $6\sqrt{2}$ см, і вуглом пры аснове, роўным 75° .
 б) Плошча раўнабедранага трохвугольніка роўна 16 см², вугал пры аснове 15° . Знайдзіце даўжыню бакавой стараны трохвугольніка.
59. Выведзіце формулу плошчы роўнастаронняга трохвугольніка $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, выкарыстаўшы формулу $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.
60. Дадзены ромб $ABCD$, $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што $S_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$.



ПАВЫШАНЫ ЎЗРОВЕНЬ

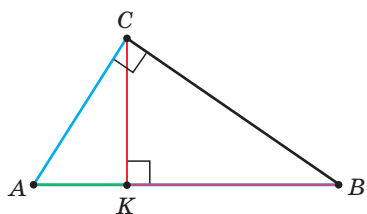
- 61*. а) Плошча раўнабедранай трапецыі роўна $36\sqrt{3}$ см², вугал паміж дыяганаллю і асновай роўны 30° . Знайдзіце даўжыню дыяганалі трапецыі.

- б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі з дыяганаллю, роўнай 12 см, і вуглом паміж дыяганаллю і стараной асновы, роўным 15° .
- 62*.** а) Дзве стараны трохвугольніка маюць даўжыні a і b . Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча трохвугольніка.
- б) Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка роўны d_1 і d_2 . Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча чатырохвугольніка.
- 63*.** У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Выкарыстаўшы формулу $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, дакажыце, што $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку

Калі для дадатных лікаў a , b і c выконваецца прапорцыя $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то лік b называецца *сярэднім прапарцыянальным лікаў a і c* (паміж лікамі a і c). З дадзенай прапорцыі $b^2 = ac$, адкуль $b = \sqrt{ac}$. У такой форме запісу лік b яшчэ называюць *сярэднім геаметрычным лікаў a і c* .

Прыклад. Лік 4 з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным, або сярэднім геаметрычным лікаў 2 і 8, паколькі $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, або $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.



Рыс. 61

У прамавугольным трохвугольніку ABC , дзе $\angle C = 90^\circ$, правядзём вышыню CK (рыс. 61). Адрэзак AK з'яўляецца праекцыяй катэта AC на гіпатэнузу, а адрэзак BK — праекцыяй катэта BC на гіпатэнузу. Катэты, гіпатэнузу, вышыня і праекцыі катэтаў на гіпатэнузу звязаны адносінамі, якія мы сфармулюем у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма (аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку).

а) Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (гл. рыс. 61).

б) Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на гіпатэнузу, г. зн. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.