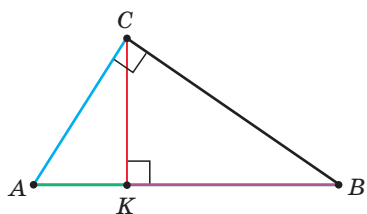


- б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі з дыяганаллю, роўнай 12 см, і вуглом паміж дыяганаллю і стараной асновы, роўным 15° .
- 62*.** а) Дзве стараны трохвугольніка маюць даўжыні a і b . Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча трохвугольніка.
- б) Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка роўны d_1 і d_2 . Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча чатырохвугольніка.
- 63*.** У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O . Выкарыстаўшы формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, дакажыце, што $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку

Калі для дадатных лікаў a , b і c выконваецца прапорцыя $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то лік b называецца *сярэднім прапарцыянальным лікаў a і c* (паміж лікамі a і c). З дадзенай прапорцыі $b^2 = ac$, адкуль $b = \sqrt{ac}$. У такой форме запісу лік b яшчэ называюць *сярэднім геаметрычным лікаў a і c* .

Прыклад. Лік 4 з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным, або сярэднім геаметрычным лікаў 2 і 8, паколькі $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, або $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.



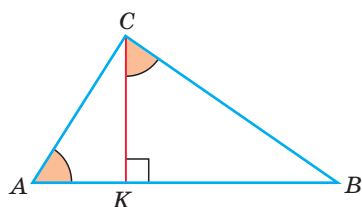
Рыс. 61

У прамавугольным трохвугольніку ABC , дзе $\angle C = 90^\circ$, правядзём вышыню CK (рыс. 61). Адрэзак AK з'яўляецца праекцыяй катэта AC на гіпатэнузу, а адрэзак BK — праекцыяй катэта BC на гіпатэнузу. Катэты, гіпатэнузу, вышыня і праекцыі катэтаў на гіпатэнузу звязаны адносінамі, якія мы сфармулюем у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма (аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку).

а) Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (гл. рыс. 61).

б) Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на гіпатэнузу, г. зн. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.

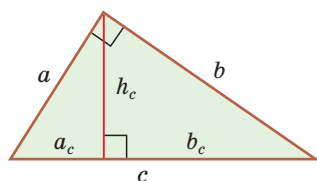


Рыс. 62

Доказ. а) Заўважым, што калі $\angle ACB = 90^\circ$, $CK \perp AB$, то $\angle BCK = \angle A$ (гэтыя вуглы дапаўняюць $\angle B$ да 90°) (рыс. 62). З $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}$, з $\triangle BCK$ $\operatorname{tg} \angle BCK = \frac{BK}{CK}$. Адсюль $\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}$, $CK^2 = AK \cdot BK$, $CK = \sqrt{AK \cdot BK}$.

б) З $\triangle ACK$ $\cos A = \frac{AK}{AC}$, з $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$, адкуль $\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC^2 = AB \cdot AK$, $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$.

Аналагічна даказваецца, што $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$. Тэарэма даказана.



Рыс. 63

Абзначыўшы катэты a і b , гіпатэнузу c , вышыню h_c , праекцыі катэтаў на гіпатэнузу a_c і b_c (рыс. 63), атрымаем наступныя формулы:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \text{ або } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$

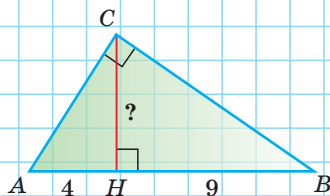
$$a^2 = c \cdot a_c, \text{ або } a = \sqrt{c \cdot a_c},$$

$$b^2 = c \cdot b_c, \text{ або } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

А цяпер выканайце Тэст 1 і Тэст 2.

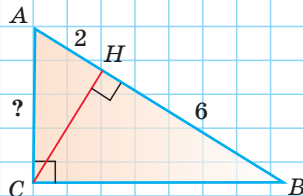
Тэст 1

Знайдзіце вышыню CH прамавугольнага трохвугольніка ABC .



Тэст 2

Знайдзіце катэт AC прамавугольнага трохвугольніка ABC .



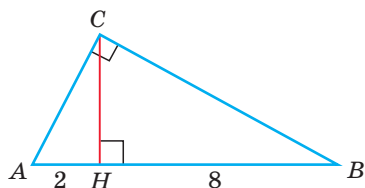
Заданні да § 6

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. Знайсці плошчу прамавугольнага трохвугольніка, калі праекцыі катэтаў на гіпатэнузу роўны 2 см і 8 см.

Рашэнне. Няхай CH — вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AH = 2$ см — праекцыя катэта AC на гіпатэнузу, $HB = 8$ см —



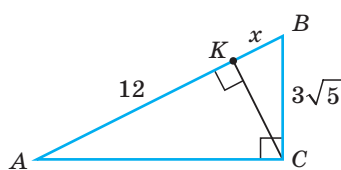
Рыс. 64

праекцыя катэта CB на гіпатэнузу (рыс. 64). Паколькі вышыня CH ёсць сярэдняе геаметрычнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, то $CH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Адказ: 20 см^2 .

Задача 2. У прамавугольным трохвугольніку ABC з вяршыні прамога вугла C праведзена вышыня CK , $BC = 3\sqrt{5}$ см, $AK = 12$ см (рыс. 65). Знайсці гіпатэнузу AB .



Рыс. 65

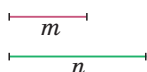
Рашэнне. Няхай $KB = x$ см, тады $AB = (x + 12)$ см. Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй катэта на гіпатэнузу.

Таму $BC^2 = AB \cdot KB$, г. зн. $(3\sqrt{5})^2 = (x + 12) \cdot x$, $x^2 + 12x - 45 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = -15$, $x_2 = 3$. Па сэнсе задачы $x > 0$. Значыць, $KB = 3$ см, $AB = 15$ см.

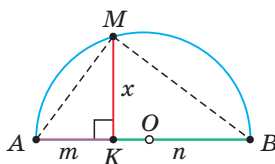
Адказ: 15 см.

Задача 3*. Пры дапамозе цыркуля і лінейкі пабудавать адрэзак, роўны сярэдняму геаметрычнаму адрэзкаў m і n .

Рашэнне. Няхай дадзены адрэзкі m і n . Неабходна пабудавать адрэзак $x = \sqrt{mn}$.



Рыс. 66



Пабудова.

1) На адвольнай прамой адкладваем дадзеныя адрэзкі: $AK = m$, $KB = n$.

2) На адрэзку AB як на дыяметры будзем паўакружнасць, для чаго знаходзім сярэдзіну O адрэзка AB , адкуль OA — радыус дадзенай акружнасці.

3) З пункта K узнімаем перпендыкуляр да прамой AB да перасячэння з паўакружнасцю ў пункце M (рыс. 66).

Адрэзак $MK = x$ — сярэдняе прапарцыянальнае адрэзкаў $AK = m$ і $KB = n$.

Доказ. $\angle AMB$ — прамы як упісаны вугал, які абавіраецца на дыяметр. У прамавугольным трохвугольніку AMB вышыня MK з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным праекцый катэтаў AM і MB на гіпатэнузу AB :

$$MK = \sqrt{AK \cdot KB}, \text{ г. зн. } x = \sqrt{mn}.$$



РАШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

64. У прямокутному трикутнику ABC проведена висота CH з вершини прямого кута. За даних на рисунках 67, а)–в) знайдіть довжину відрізка x .

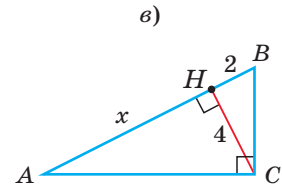
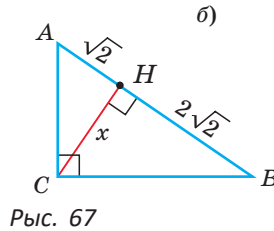
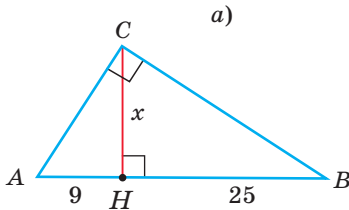


Рис. 67

65. Дано прямокутний трикутник ABC , CH — висота, опущенная на гіпотенузу. Знайдіть довжину відрізка x (рис. 68, а)–в).

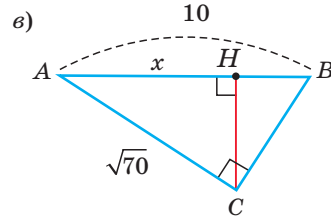
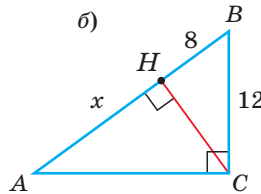
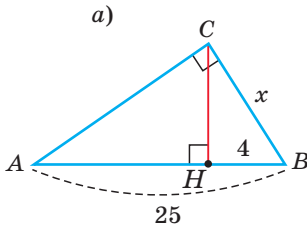


Рис. 68

66. У прямокутному трикутнику ABC катет BC дорівнює 8 см, а проекція катета AC на гіпотенузу AB дорівнює 12 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.
67. AB — діаметр кола (рис. 69). Знайдіть довжину перпендикуляра MK .
68. Дано прямокутник $ABCD$. Перпендикуляр BK , опущений на діагональ AC , ділить її на відрізки, дорівнюють 2 см і 6 см. Знайдіть меншу сторону прямокутника.
69. Знайдіть площу прямокутного трикутника, у якого висота ділить гіпотенузу на відрізки, дорівнюють 1,2 см і 4,8 см.

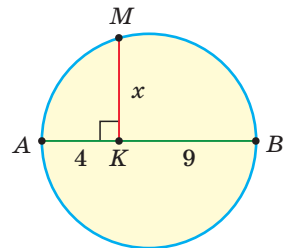


Рис. 69



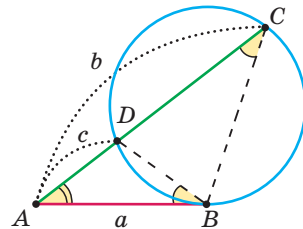
ПОВИШАНИ ЇЗРІВЕНЬ

- 70*. У прямокутному трикутнику ABC катет AC дорівнює проекції катета BC на гіпотенузу AB . Знайдіть $\cos A$.
- 71*. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена висота CH , катет AC дорівнює 4 см, $BH - AH = 4$ см. Знайдіть величину кута A .

Паўтарэнне*

У 8-м класе мы даказалі наступную тэарэму:

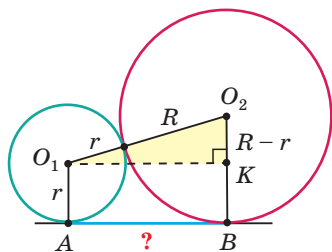
Тэарэма (аб датычнай і сякучай). *Калі з аднаго пункта да акружнасці праведзены датычная і сякучая, то квадрат адрэзка датычнай, які злучае дадзены пункт і пункт дотыку, роўны здабытку адрэзкаў сякучай, якія злучаюць дадзены пункт і пункты перасячэння сякучай з акружнасцю, г. зн. $a^2 = bc$ (рыс. 70).*



Рыс. 70

Як мы бачым, адрэзак a з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным паміж адрэзкамі b і c сякучай. Гледзячы на рысунак 70, успомніце ідэю доказу тэарэмы.

Задача. Знайдзіце AC (гл. рыс. 70), калі $AB = 4$ см, $AD = 2$ см.



Рыс. 71

Таксама ў 8-м класе была разгледжана ключавая задача аб знаходжанні адрэзка агульнай датычнай дзвюх акружнасцей, якія датыкаюцца знешнім чынам, з радыусамі, роўнымі R і r (рыс. 71). Быў атрыманы адказ: $AB = 2\sqrt{Rr}$, г. зн. шуканы адрэзак AB — гэта падвоенае сярэдняе геаметрычнае радыусаў акружнасцей.

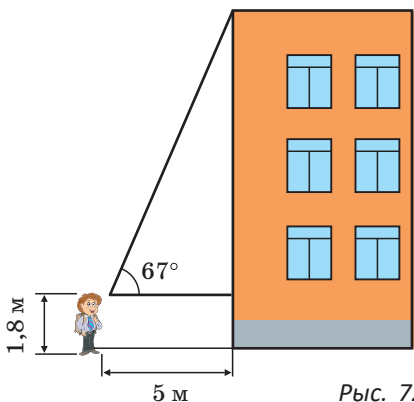
Аднавіце па рысунку 71 рашэнне гэтай задачы.

Задача. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB , калі $R = 18$ см, $r = 8$ см (гл. рыс. 71).

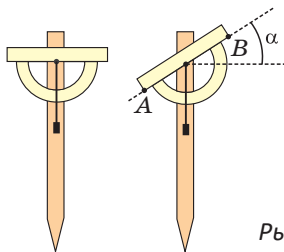
Рэальная геаметрыя

Рабяты з 9-га класа знайшлі вышыню сваёй школы наступным чынам. Яны вымералі вугал, пад якім бачна кромка даху школы (рыс. 72), і адлегласць ад месца вымярэння да фундаменту школы. Вугал аказаўся роўным 67° , а адлегласць — 5 м. Далей яны прымянілі алгарытм рашэння прамавугольнага трохвугольніка. Улічыўшы, што рост школьніка, які вымяраў вугал, роўны 180 см, рабяткі знайшлі прыкладную вышыню школы: 13,6 м. Праверце, ці не памыліліся рабяткі ў вылічэннях. Паспрабуйце знайсці падобным чынам вышыню сваёй школы.

Прыбор, пры дапамозе якога вызначаюць вуглы на мясцовасці, называецца *экліметрам*. Такі прыбор можна вырабіць самастойна. Для гэтага спатрэбіцца транспарцір, нітка з грузам і заостраная палка. Заостраную палку ўтыкаюць вертыкальна ў зямлю так, каб нітка з грузам размяшчалася вертыкальна. Паварочваючы транспарцір, назіральнік глядзіць уздоўж прамой AB (рыс. 73). Па адхіленні ніткі адвеса на транспарціры вызначаюць вымяраемы вугал. Раствлумачце, як вызначыць шуканы вугал α .



Рыс. 72



Рыс. 73

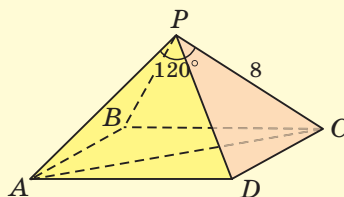
Геаметрыя 3D

Напомнім, што ў аснове правільнай чатырохвугольнай піраміды ляжыць квадрат і ўсе яе бакавыя канты роўныя.

Задача. На рысунку 74 паказана правільная чатырохвугольная піраміда $PABCD$. Яе бакавы кант роўны 8 см, а вугал APC роўны 120° . Перамясціце чарцёж піраміды ў сшытак. Знайдзіце:

- а) плошчу дыяганальнага сячэння APC гэтай піраміды, выканаўшы асобна чарцёж трохвугольніка APC ;
- б) даўжыню вышыні PO піраміды, дзе пункт O — цэнтр асновы піраміды;
- в) плошчу асновы піраміды;
- г) аб'ём піраміды па формуле $V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{асн}} \cdot h$, дзе $S_{\text{асн}}$ — плошча асновы, h — вышыня піраміды.

Запішыце памеры якога-небудзь паралелепіпеда, які па аб'ёме роўны дадзенай пірамідзе.



Рыс. 74



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Формулы $\sin(180^\circ - \alpha) = \dots$, $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$.
2. Як звязаны сінус і косінус тупога вугла з сінусам і косінусам сумежнага з ім вострага вугла.
3. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма, звязаныя з сінусам вугла.
4. Тэарэму аб сярэднім прапарцыянальным (сярэднім геаметрычным) у прамавугольным трохвугольніку.

Умеем

1. Знаходзіць сінус, косінус, тангенс і катангенс вуглоў 120° , 135° , 150° .
2. Выводзіць формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма, звязаныя з сінусам вугла.
3. Даказваць тэарэму аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку.

§ 7*. Крэатыўная геаметрыя

1. Тэарэма аб плошчах трохвугольнікаў з агульным (роўным) вуглом

Плошчы трохвугольнікаў, якія маюць агульны (роўны) вугал, адносяцца як здабыткі старон, якія змяшчаюць гэты вугал (рыс. 75), г. зн.

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB} = \frac{b_1 c_1}{bc}.$$