§ 3. Трыганаметрычныя формулы

Ведаючы, што $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, дзе a і b — катэты, c — гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка, можна атрымаць формулы, якія звязваюць значэнні трыганаметрычных функцый вострага вугла.

1. Асноўная трыганаметрычная тоеснасць

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказ. Па тэарэме Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$.

Тады $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$

Так, для вугла $30°$ атрымаем: $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$. Гэта праўда, паколькі $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$

Вынік.

Паколькі сінус і косінус вострага вугла α дадатныя, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \;\; і \;\; \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

2. Выражэнне тангенса і катангенса праз сінус і косінус

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Доказ. а) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Вынік. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

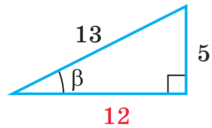
3. Асноўная задача

Дадзена: $\sin\beta = \frac{5}{13}$, β — востры вугал.

Знайсці: $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

Рашэнне. *Спосаб* 1. Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\beta = 1$, $\cos^2\beta = 1 - \frac{25}{169}$, $\cos^2\beta = \frac{144}{169}$, $\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$. Паколькі косінус *вострага вугла* большы за нуль, то $\cos\beta = \frac{12}{13}$; адкуль $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{12}{5}$.

Спосаб 2. Намалюем прамавугольны трохвугольнік з катэтам 5 і гіпатэнузай 13 (рыс. 41). Сінус вугла, процілеглага дадзенаму катэту, роўны $\frac{5}{13}$. Таму гэты вугал роўны β. Па тэарэме Піфагора другі катэт роўны $\sqrt{13^2-5^2}=12$. Тады $\cos\beta=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{12}{5}$.



Рыс. 41

Спосаб 3. Няхай катэт, процілеглы вуглу β, роўны $5x$, тады гіпатэнуза роўна $13x$. Па тэарэме Піфагора прылеглы катэт роўны $\sqrt{(13x)^2-(5x)^2}=\sqrt{144x^2}=12x$. Адсюль $\cos\beta=\frac{12x}{13x}=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$

$=\frac{5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{12}{5}$.

Адказ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

Тэст 1

Няхай α — востры вугал. Калі $\cos\alpha=0{,}8$, то $\sin\alpha$ роўны:

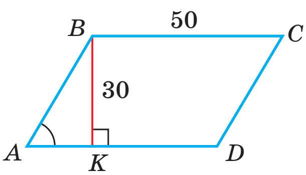
а) 0,8; б) 0,6; в) 0,2; г) 1,6.

Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У паралелаграме ABCD* (рыс. 42) *старана* $BC=50$ *см, вышыня* $BK=30$ *см,* $\cos A=\frac{8}{17}$. *Знайсці перыметр паралелаграма.*



Рыс. 42

Рашэнне. З трохвугольніка ABK знаходзім: $\sin A=\frac{BK}{AB}$, $AB=\frac{BK}{\sin A}$. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці вынікае: $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\sin^2 A+\left(\frac{8}{17}\right)^2=1$, $\sin^2 A=1-\frac{64}{289}=\frac{225}{289}$, $\sin A=\frac{15}{17}$ (сінус вострага вугла дадатны).

Тады $AB=\frac{BK}{\sin A}=\frac{30}{\frac{15}{17}}=34$ (см),

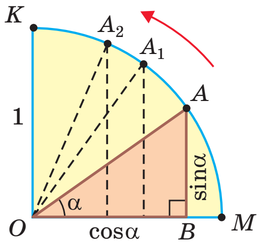
$P_{ABCD}=2(AB+BC)=2\cdot(34+50)=168$ (см).

Адказ: 168 см.

Задача 2. *Даказаць, што пры павелічэнні вугла ад* $0°$ *да* $90°$:

а) *сінус вугла павялічваецца ад* 0 *да* 1, *а косінус — памяншаецца ад* 1 *да* 0;

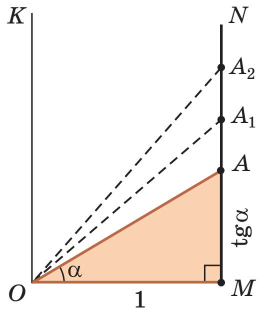
б) *тангенс вугла павялічваецца ад* 0 *да бясконцасці.*



Рыс. 43

Рашэнне. а) Разгледзім прамавугольныя трохвугольнікі з гіпатэнузай, роўнай 1. Для гэтага апішам радыусам OM, роўным 1, чвэрць акружнасці — дугу MK (рыс. 43). Няхай $\angle AOM = \alpha$. Апусцім з пункта A перпендыкуляр AB на OM. Тады $\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$, $\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. Пры павароце радыуса OM вакол цэнтра O супраць гадзіннікавай стрэлкі, пачынаючы ад OM і заканчваючы OK, вугал α будзе павялічвацца ад $0°$ да $90°$ (утвараючы адзначаныя на чарцяжы вуглы: $\angle MOA$, $\angle MOA_1$, $\angle MOA_2$ і г. д.). Велічыня катэта AB, процілеглага вуглу α, будзе павялічвацца ад 0 да 1. А велічыня катэта OB, наадварот, будзе памяншацца ад 1 да 0. Такім чынам, **пры павелічэнні вугла ад $0°$ да $90°$ яго сінус павялічваецца ад 0 да 1, а косінус памяншаецца ад 1 да 0.**

З формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ таксама вынікае (улічыўшы дадатнасць сінуса і косінуса вострага вугла), што з павелічэннем сінуса ад 0 да 1 косінус памяншаецца ад 1 да 0.



Рыс. 44

б) Для вызначэння змянення тангенса вугла зручна разглядаць трохвугольнікі, у якіх прылеглы катэт не змяняецца і застаецца роўным 1, а процілеглы катэт змяняецца. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік AOM, у якога адрэзак $OM = 1$, $\angle AOM = \alpha$ (рыс. 44). Па азначэнні $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$. Вугал α станем змяняць, перамяшчаючы пункт A па прамой MN, пачынаючы ад пункта M і праходзячы праз пункты A, A_1, A_2 і г. д. Пры гэтым вугал α і яго тангенс пачнуць нарастаць. Такім чынам, калі вугал α пры руху пункта A ўверх будзе імкнуцца да вугла KOM, роўнага $90°$, то тангенс гэтага вугла будзе неабмежавана нарастаць.

Да такой жа высновы можна прыйсці, разглядаючы формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Пры павелічэнні вугла α ад $0°$ да $90°$ лічнік дробу будзе павялічвацца ад 0 да 1, а назоўнік — памяншацца ад 1 да 0, значыць, увесь дроб будзе павялічвацца ад 0 да бясконцасці. Такім чынам, **пры павелічэнні вугла ад $0°$ да $90°$ яго тангенс павялічваецца ад 0 да бясконцасці.**

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

34. Дадзены востры вугал α.

а) Знайдзіце $\cos\alpha$, калі $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

б) Знайдзіце $\sin\alpha$, калі $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

в) Знайдзіце $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

г) Знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

35. а) Знайдзіце $\operatorname{ctg}\alpha$, калі α — востры вугал і $\sin\alpha = 0{,}8$.

б) Знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$, калі α — востры вугал і $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

36. Запоўніце пропускі ў формулах, перапісаўшы іх у сшытак:

а) $\sin^2\beta + \ldots = 1$; б) $\cos^2\alpha = 1 - \ldots$;

в) $\ldots = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\ldots}{\ldots}$.

37. Знайдзіце:

а) сінус, тангенс і катангенс вострага вугла, косінус якога роўны 0,6;

б) косінус, тангенс і катангенс вострага вугла, сінус якога роўны $\frac{7}{25}$.

38. У акружнасці радыусам, роўным 6 см, праведзены дыяметр AB і хорда AC. Знайдзіце даўжыню хорды BC, калі $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

39. Параўнайце велічыні вострых вуглоў α і β, калі:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$;

б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$.

40. Высветліце, што больш: $\sin\alpha$ або $\operatorname{tg}\alpha$, дзе α — востры вугал.

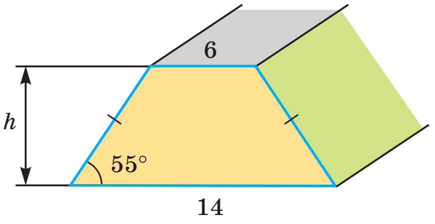
41. Дакажыце, што для вострага вугла α справядлівая тоеснасць $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

42. Выведзіце для вострага вугла α формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ і $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, падзяліўшы пачленна абедзве часткі асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці на $\sin^2\alpha$ і на $\cos^2\alpha$.

43. Знайдзіце сінус вострага вугла α, калі яго катангенс роўны $1\frac{1}{3}$.

Рэальная геаметрыя

На рысунку 45 паказаны памеры чыгуначнага насыпу, папярочнае сячэнне якога мае форму раўнабедранай трапецыі. Знайдзіце па пазначаных памерах прыкладную вышыню h насыпу. Адказ акругліце да 0,1 м.



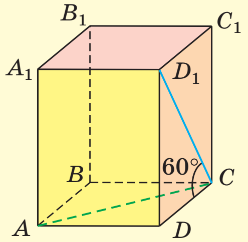
Рыс. 45

Рыс. 46

Цікава ведаць. Дзіцячая чыгунка імя К. С. Заслонава ў Мінску (мал. 46) — адзіная дзіцячая чыгунка ў Беларусі. На ёй працуюць тры станцыі: «Заслонава», «Піянерская» і «Сасновы Бор». Даўжыня галоўнага пуці складае 3790 м. Штогод 9 мая юныя чыгуначнікі працуюць у форме ваенных гадоў. У гэты дзень на станцыі «Сасновы бор» гасцей чакае святочная канцэртная праграма.

Геаметрыя 3D

Задача. У аснове прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць квадрат, дыяганаль якога $AC = 4\sqrt{6}$ см. Дыяганаль CD_1 бакавой грані ўтварае з кантам асновы DC вугал 60° (рыс. 47). Знайдзіце аб'ём паралелепіпеда.



Рыс. 47

Р а ш э н н е. Аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда можна знайсці па формуле $V = abc$, дзе a, b і c — яго вымярэнні. Паколькі $ABCD$ — квадрат, то $AD = DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). З прамавугольнага трохвугольніка D_1DC знаходзім $D_1D = DC \cdot \mathrm{tg}\, 60° = DC \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см).

Шуканы аб'ём $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 576$ (см^3).

А д к а з: 576 см^3.

Плошчу паверхні прамавугольнага паралелепіпеда знайдзіце самастойна.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.
2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў $30°$, $45°$, $60°$.
3. Формулы, якія звязваюць трыганаметрычныя функцыі аднаго вугла.

Умеем

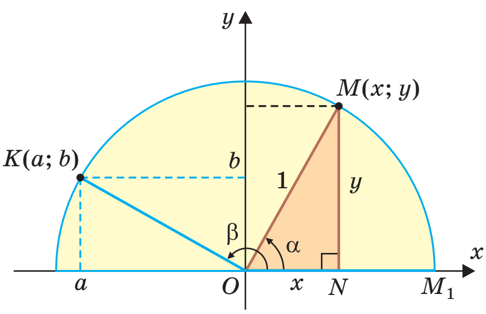
1. Рашаць прамавугольны трохвугольнік.
2. Ведаючы $\sin\alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\cos\alpha$ і выконваць адваротнае дзеянне.
3. Ведаючы $\sin\alpha$ або $\cos\alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.
4. Даказваць асноўную трыганаметрычную тоеснасць.

§ 4. Сінус, косінус, тангенс і катангенс тупога вугла

1. Вызначэнне значэнняў $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для любога вугла α ад $0°$ да $180°$

Раней мы далі азначэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла праз адносіны старон прамавугольнага трохвугольніка. Зробім цяпер гэта для вуглоў ад $0°$ да $180°$.

Разгледзім паўакружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным 1 (рыс. 48). Ад дадатнай паўвосі Ox у верхнюю паўплоскасць адкладзём востры вугал α, старана якога перасякае паўакружнасць у пункце $M(x;\ y)$. З прамавугольнага трохвугольніка OMN, дзе $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, атрымліваем: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, г. зн.



Рыс. 48

сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла α выражаюцца праз каардынаты x і y пункта $M(x;\ y)$. Такім чынам вызначаюцца значэнні $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ для $\angle MOM_1 = \alpha$ з прамежку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Сінусам вугла α называецца ардыната y, косінусам — абсцыса x, тангенсам — адносіна ардынаты да абсцысы $\frac{y}{x}$, а катангенсам — адносіна абсцысы да ардынаты $\frac{x}{y}$ пункта M адзінкавай паўакружнасці.