



ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне сіноса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка.
2. Значэнні трыганаметрычных функцый вуглоў 30° , 45° , 60° .
3. Формулы, якія звязваюць трыганаметрычныя функцыі аднаго вугла.

Умеем

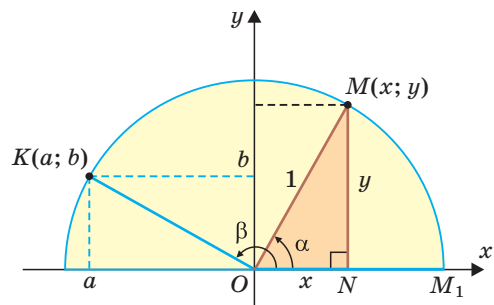
1. Рашаць прамавугольны трохвугольнік.
2. Ведаючы $\sin \alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\cos \alpha$ і выконваць адваротнае дзеянне.
3. Ведаючы $\sin \alpha$ або $\cos \alpha$, дзе α — востры вугал, знаходзіць $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.
4. Даказваць асноўную трыганаметрычную тоеснасць.

§ 4. Сінус, косінус, тангенс і катангенс тупога вугла

1. Вызначэнне значэнняў $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для любога вугла α ад 0° да 180°

Раней мы далі азначэнні сіноса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла праз адносіны старон прамавугольнага трохвугольніка. Зробім цяпер гэта для вуглоў ад 0° да 180° .

Разгледзім паўакружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным 1 (рыс. 48). Ад дадатнай паўвосі Ox у верхнюю паўплоскасць адкладзём востры вугал α , старана якога перасякае паўакружнасць у пункце $M(x; y)$. З прамавугольнага трохвугольніка OMN , дзе $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, атрымліваем: $\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, г. зн.



Рыс. 48

сінус, косінус, тангенс і катангенс вострага вугла α выражаюцца праз каардынаты x і y пункта $M(x; y)$. Такім чынам вызначаюцца значэнні $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ для $\angle MOM_1 = \alpha$ з прамежку $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Сінусам вугла α называецца ардыната y , косінусам — абсцыса x , тангенсам — адносіна ардынаты да абсцысы $\frac{y}{x}$, а катангенсам — адносіна абсцысы да ардынаты $\frac{x}{y}$ пункта M адзінкавай паўакружнасці.

Напрыклад, для тупога $\angle KOM_1 = \beta$ (гл. рыс. 48), дзе $K(a; b)$, атрымаем:

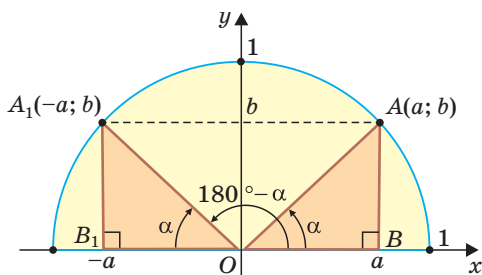
$$\sin \beta = b, \cos \beta = a, \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}.$$

Для любога становiшча пункта $M(x; y)$ на адзiнкавай паўакружнасцi правiльная роўнасць $x^2 + y^2 = 1$ (дакажыце самастойна). Таму для вуглоў α , дзе $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, справядлiвая асноўная трыганаметрычная тоеснасць $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Таксама правiльныя тоеснасцi: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

2. Знаходжанне сiнуса, косiнуса, тангенса i катангенса тупых вуглоў

Няхай $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, адкуль $\angle A_1OB = 180^\circ - \alpha$ (рыс. 49). Паколькi $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$ па гiпатэнузе i вострым вугле, то $A_1B_1 = AB$, $OB_1 = OB$. Пункты A i A_1 маюць кардынаты: $A(a; b)$ i $A_1(-a; b)$. Тады $\sin \alpha = b$, $\cos \alpha = a$, $\sin(180^\circ - \alpha) = b$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -a$, г. зн. для вуглоў ад 0° да 180° справядлiвыя роўнасцi:



Рыс. 49

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Можна карыстацца наступным правiлам:

Сiнус тупога вугла роўны сiнусу сумежнага з iм вострага вугла. Косiнус тупога вугла роўны косiнусу сумежнага з iм вострага вугла, узятamu са знакам «мiнус».

Прыклад 1. $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Падзялiўшы пачленна роўнасць $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ на роўнасць $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, а затым наадварот, атрымаем роўнасцi:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Можна карыстацца наступным правiлам:

Тангенс (катангенс) тупога вугла роўны тангенсу (катангенсу) сумежнага з iм вострага вугла, узятamu са знакам «мiнус».

Прыклад 2. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

Атрыманыя формулы i правiлы дазваляюць знаходзiць значэннi трыганаметрычных функцый тупога вугла праз значэннi трыганаметрычных функцый вострага вугла, якi дапаўняе дадзены тупы вугал да 180° : сiнусы вуглоў, якiя дапаўняюць адзiн аднаго да 180° , роўныя памiж сабой, а косiнусы, тангенсы i катангенсы — процiлеглыя. Паколькi сiнус, косiнус, тангенс i катангенс вострага вугла дадатныя, то сiнус тупога вугла дадатны, а косiнус, тангенс i катангенс — адмоўныя.

А цяпер выканайце **Тэст 1**.

3. Значэннi трыганаметрычных функцый для вуглоў 0° , 90° , 180°

Калi прамень OM супадзе з праменем OM_1 (рыс. 50), то будзем лiчыць, што $\alpha = 0^\circ$. Тады:

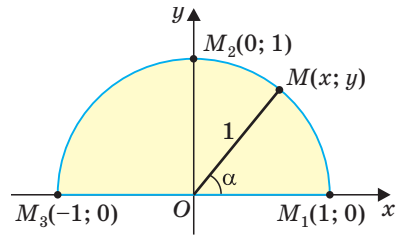
а) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значэнне $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0}$ не вызначана, паколькi дзяленне на нуль немагчымае;

б) $\angle M_2OM_1 = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значэнне $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$ не вызначана, паколькi дзяленне на нуль немагчымае;

в) $\angle M_3OM_1 = 180^\circ$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$; значэнне $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$ не вызначана, паколькi дзяленне на нуль немагчымае.

Паколькi праекцыi радыуса, роўнага 1, на восi каардынат меншыя або роўныя 1, то для вуглоў $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ справядлiвыя няроўнасцi: $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

А цяпер выканайце **Тэст 2**.



Рыс. 50

Тэст 1

Вылiчыце:

$$\cos 120^\circ + \sin 150^\circ.$$

а) 0;

б) 1;

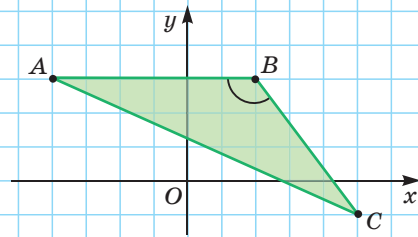
в) -1;

г) $\sqrt{3}$.

Тэст 2

Па даных на рысунку знайдзiце косiнус вугла B .

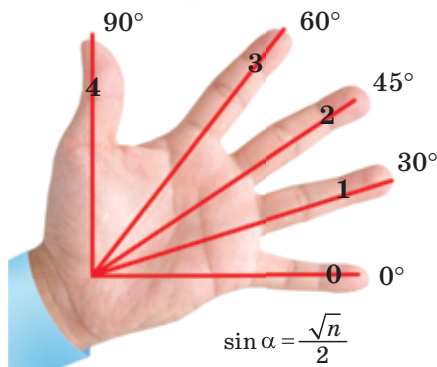
а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{3}$.



Гімнастыка розуму

Калі максімальна расставіць пальцы рукі, то вуглы паміж мезенцам і астатнімі пальцамі будуць роўны прыкладна 30° , 45° , 60° , 90° (рыс. 51).

Цікава, што калі пальцы пранумараваць лічбамі ад 0 да 4, як на рысунку, то для знаходжання сінуса вуглоў 0° , 30° , 45° , 60° і 90° можна карыстацца формулай $\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$, дзе α — дадзены вугал, а n — нумар пальца. Праверце самастойна работу гэтай формулы.

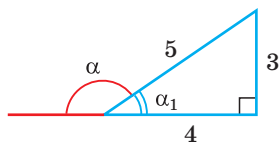


Рыс. 51

**Заданні да § 4****РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы**

Задача. Знайсці $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, калі $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і α — тупы вугал.

Рашэнне. *Спосаб 1.* Паколькі $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Паколькі вугал α — тупы, то яго косінус адмоўны. Таму $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Тады $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.



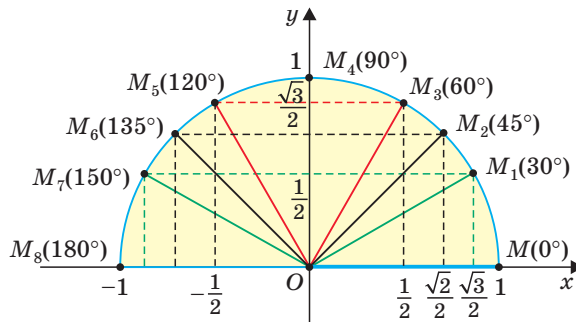
Рыс. 52

Спосаб 2. Сінус вострага вугла α_1 , сумежнага з дадзеным тупым вуглом α , роўны таксама $\frac{3}{5}$. Пабудуем прамавугольны трохвугольнік са старанамі 3, 4 і 5 (рыс. 52). У ім $\sin \alpha_1 = \frac{3}{5}$, а $\cos \alpha_1 = \frac{4}{5}$. Паколькі косінусы сумежных вуглоў процілеглыя, то $\cos \alpha = -\cos \alpha_1 = -\frac{4}{5}$. Аналагічна, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Адказ: $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

**РАШАЕМ
САМАСТОЙНА**

44. Пункты M_1, M_2, \dots, M_8 атрымліваюцца пры павароце радыуса OM адзінкавай паўакружнасці вакол пункта O супраць гадзіннікавай стрэлкі адпаведна на вуглы $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ (рыс. 53).



Рыс. 53

а) Выкарыстаўшы рысунак, знайдзіце каардынаты пунктаў M , M_1 , M_2 , ..., M_8 .

б) Па каардынатах адпаведных пунктаў знайдзіце $\sin 135^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$.



в) Знайдзіце $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$.

45. Пры дапамозе формул $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ або правіл знаходжання значэнняў трыганаметрычных функцый тупога вугла знайдзіце:

а) $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$, $\operatorname{ctg} 120^\circ$;

б) $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 135^\circ$;

в) $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\operatorname{ctg} 150^\circ$.

46. Вядома, што вугал α тупы. Знайдзіце $\cos \alpha$, калі:

а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin \alpha = 0,6$;

в) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

47. Вядома, што $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдзіце $\sin \alpha$, калі:

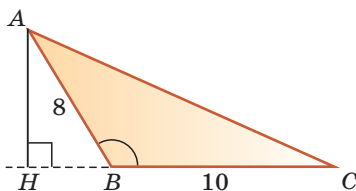
а) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$;

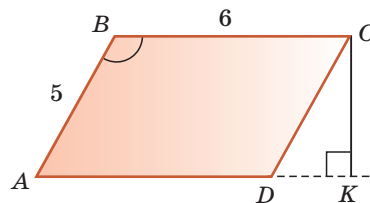
в) $\cos \alpha = -0,2$.

48. а) У трохвугольнiку ABC (рыс. 54) стораны $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $\sin \angle ABC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце вышыню AH і S_{ABC} .

б) У паралелаграме $ABCD$ (рыс. 55) стораны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos \angle ABC = -0,6$. Знайдзіце вышыню CK і S_{ABCD} .



Рыс. 54



Рыс. 55

49. Выкарыстаўшы калькулятар (таблiцы) i трыганаметрычныя формулы (правiлы), знайдзiце, акруглiўшы адказ да 0,0001:
- а) $\sin 100^\circ$; б) $\cos 175^\circ$; в) $\operatorname{tg} 115^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 140^\circ$.
50. а) Косiнус аднаго з сумежных вуглоў роўны $-0,3$. Знайдзiце косiнус другога вугла.
 б) Сiнус тупога вугла паралелаграма роўны $0,8$. Знайдзiце тангенс вострага вугла паралелаграма.
51. Знайдзiце $\sin \alpha + \cos \alpha$, калi вугал α роўны:
- а) 0° ; б) 90° ; в) 180° .
52. Выкарыстаўшы адзiнкавую паўакружнасць, дакажыце, што:
- а) пры павелiчэннi вугла ад 0° да 90° яго сiнус павялiчваецца ад 0 да 1, косiнус памяншаецца ад 1 да 0;
 б) пры павелiчэннi вугла ад 90° да 180° яго сiнус памяншаецца ад 1 да 0, косiнус памяншаецца ад 0 да -1 .
53. Дакажыце, што для вуглоў трохвугольнiка ABC правiльная роўнасць:
- а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гiмнастыка розуму

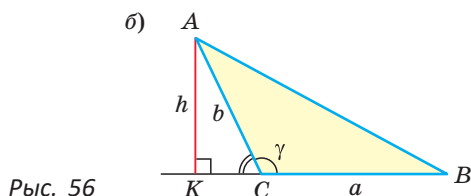
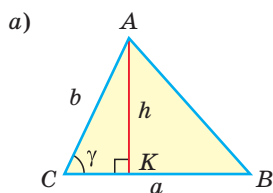
- Знайдзiце значэнне выразу $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$.
- Знайдзiце значэнне выразу $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.

§ 5. Формулы плошчы трохвугольнiка i плошчы паралелаграма

Трыганаметрычныя функцыi дазваляюць атрымаць формулы для вылiчэння плошчы трохвугольнiка i плошчы паралелаграма. Сфармулюем iх у выглядзе дзвюх тэарэм.

Тэарэма. Плошча трохвугольнiка роўна палавiне здабытку дзвюх яго старон на сiнус вугла памiж iмi, г. зн. $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Доказ. Няхай у трохвугольнiку ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — востры, $AK = h$ — вышыня (рыс. 56, а).



Рыс. 56