49. Выкарыстаўшы калькулятар (табліцы) і трыганаметрычныя формулы (правілы), знайдзіце, акругліўшы адказ да 0,0001:

а) $\sin 100°$; б) $\cos 175°$; в) $\text{tg}\, 115°$; г) $\text{ctg}\, 140°$.

50. а) Косінус аднаго з сумежных вуглоў роўны –0,3. Знайдзіце косінус другога вугла.
б) Сінус тупога вугла паралелаграма роўны 0,8. Знайдзіце тангенс вострага вугла паралелаграма.

51. Знайдзіце $\sin\alpha + \cos\alpha$, калі вугал α роўны:

а) 0°; б) 90°; в) 180°.

52. Выкарыстаўшы адзінкавую паўакружнасць, дакажыце, што:

а) пры павелічэнні вугла ад 0° да 90° яго сінус павялічваецца ад 0 да 1, косінус памяншаецца ад 1 да 0;
б) пры павелічэнні вугла ад 90° да 180° яго сінус памяншаецца ад 1 да 0, косінус памяншаецца ад 0 да –1.

53. Дакажыце, што для вуглоў трохвугольніка ABC правільная роўнасць:

а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гімнастыка розуму

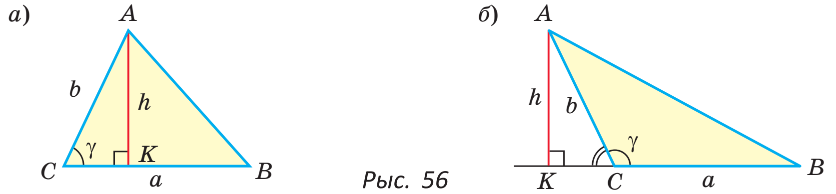
1. Знайдзіце значэнне выразу $\cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 30° \cdot \ldots \cdot \cos 180°$.
2. Знайдзіце значэнне выразу $\text{tg}\, 1° \cdot \text{tg}\, 2° \cdot \text{tg}\, 3° \cdot \ldots \cdot \text{tg}\, 88° \cdot \text{tg}\, 89°$.

§ 5. Формулы плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма

Трыганаметрычныя функцыі дазваляюць атрымаць формулы для вылічэння плошчы трохвугольніка і плошчы паралелаграма. Сфармулюем іх у выглядзе дзвюх тэарэм.

Тэарэма. **Плошча трохвугольніка роўна палавіне здабытку дзвюх яго старон на сінус вугла паміж імі, г. зн. $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.**

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — востры, $AK = h$ — вышыня (рыс. 56, *а*).



Рыс. 56

З прамавугольнага трохвугольніка AKC $\sin\gamma = \frac{h}{b}$, $h = b\sin\gamma$. Тады $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma$.

Калі вугал γ тупы (рыс. 56, *б*), то $\angle ACK = 180° - \gamma$ — востры. З прамавугольнага трохвугольніка AKC вынікае, што $h = b\sin(180° - \gamma)$. Паколькі $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma$.

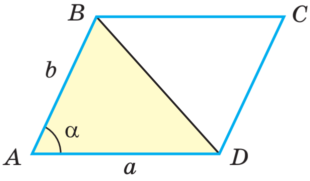
Калі $\gamma = 90°$, то $\triangle ABC$ — прамавугольны з катэтамі a і b. Улічыўшы, што $\sin 90° = 1$, атрымаем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма. **Плошча паралелаграма роўна здабытку дзвюх яго суседніх старон на сінус вугла паміж імі, г. зн.** $S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha$.

Выкарыстаўшы рысунак 57, дакажыце гэту тэарэму самастойна.

Заўвага. Калі $\alpha = 90°$, то паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам. Яго плошча $S = ab\sin 90° = ab$, паколькі $\sin 90° = 1$. Такім чынам, формула плошчы прамавугольніка $S = ab$ — прыватны выпадак формулы плошчы паралелаграма $S = ab\sin\alpha$.



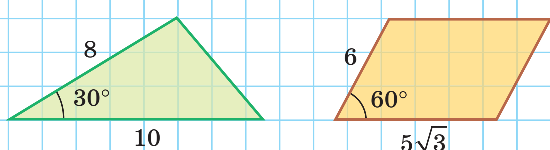
Рыс. 57

А цяпер выканайце **Тэст 1.**

Тэст 1

Знайдзіце суму плошчаў трохвугольніка і паралелаграма, паказаных на рысунку.

а) 65; б) 85; в) $45\sqrt{3}$; г) 107,5.



Вядома, што слова «сінус» у перакладзе з лацінскай мовы мае мноства значэнняў: выгіб, дуга, пазуха, бухта, упадзіна, заліў, хорда, клопат і пяшчотная любоў. Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце:

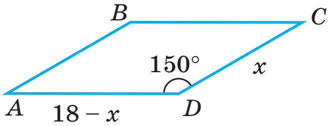
а) якое са значэнняў найбольш блізкае да матэматычнага паняцця «сінус»;

б) якія са значэнняў адносяцца да медыцыны і што называюць сінусітам.

Заданні да § 5

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *Дадзены паралелаграм ABCD, плошча якога роўна* 40 *см*², *а перыметр* — 36 *см. Знайсці стораны паралелаграма, калі яго вугал D роўны* 150° (рыс. 58).

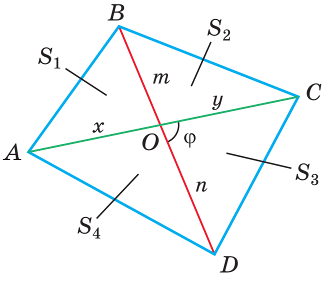


Рыс. 58

Р а ш э н н е. Паўперыметр паралелаграма роўны 18 см. Калі $CD = x$ см, то $AD = (18 - x)$ см. Тады
$S_{ABCD} = CD \cdot AD \cdot \sin D = x(18 - x) \cdot \sin 150°$ см².
Паколькі $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x(18 - x)$ см².

Па ўмове $S_{ABCD} = 40$ см². Складзём і рэшым ураўненне: $\frac{1}{2}x(18 - x) = 40$, $x^2 - 18x + 80 = 0$. Па тэарэме Віета (адваротнай) $x_1 = 8$, $x_2 = 10$ — карані. Калі $CD = 8$ см, то $AD = 10$ см, калі $CD = 10$ см, то $AD = 8$ см.
А д к а з: 8 см, 10 см.

Задача 2. *Даказаць, што плошча выпуклага чатырохвугольніка роўна палавіне здабытку яго дыяганалей на сінус вугла паміж імі, г. зн.* $\boxed{S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.}$



Рыс. 59

Д о к а з. Няхай дыяганалі $AC = d_1$ і $BD = d_2$ чатырохвугольніка $ABCD$ (рыс. 59) перасякаюцца ў пункце O, $\angle COD = \varphi$, $S_1 = S_{AOB}$, $S_2 = S_{BOC}$, $S_3 = S_{COD}$, $S_4 = S_{AOD}$. Дакажам, што $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$. Абазначым $AO = x$, $OC = y$, $BO = m$, $OD = n$. Заўважым, што $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ як вертыкальныя, $\angle BOC = 180° - \angle COD$ па ўласцівасці сумежных вуглоў. Таму $\sin\angle AOB = \sin\angle COD = \sin\varphi$, $\sin\angle BOC = \sin\angle AOD = \sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$. Па формуле плошчы трохвугольніка $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ атрымаем:

$$S_1 = \frac{1}{2}xm\sin\angle AOB = \frac{1}{2}xm\sin\varphi,\quad S_2 = \frac{1}{2}ym\sin\angle BOC = \frac{1}{2}ym\sin\varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}yn\sin\angle COD = \frac{1}{2}yn\sin\varphi,\quad S_4 = \frac{1}{2}xn\sin\angle AOD = \frac{1}{2}xn\sin\varphi.$$

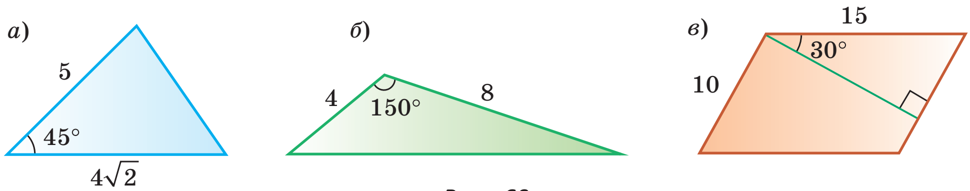
$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}xm\sin\varphi + \frac{1}{2}ym\sin\varphi + \frac{1}{2}yn\sin\varphi + \frac{1}{2}xn\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\big(m(x + y) + n(x + y)\big)\sin\varphi = \frac{1}{2}(x + y)(m + n)\sin\varphi = \frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi.$$

Сцверджанне даказана.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

54. Выкарыстаўшы формулы $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ і $S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha$, знайдзіце плошчы трохвугольнікаў і паралелаграма, паказаных на рысунку 60.



Рыс. 60

55. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC, калі:

а) $AB = 6{,}5$ см, $BC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle B = 120°$;
б) $AC = 16$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A + \angle B = 135°$.

56. Знайдзіце плошчу паралелаграма $ABCD$, калі:

а) $AB = 4{,}2$ см, $AD = 6$ см, $\sin C = \frac{2}{3}$;

б) $P_{ABCD} = 48$ см, $BC = 13$ см, $\cos B = -\frac{12}{13}$.

57. а) Плошча паралелаграма роўна $18\sqrt{3}$ см^2, адна з яго старон на 5 см большая за другую, а адзін з вуглоў роўны 60°. Знайдзіце перыметр паралелаграма.
б) Стораны паралелаграма адносяцца як 3 : 5, плошча роўна 30 см^2, а тупы вугал паралелаграма роўны 150°. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

58. а) Знайдзіце плошчу раўнабедранага трохвугольніка з бакавой стараной, роўнай $6\sqrt{2}$ см, і вуглом пры аснове, роўным 75°.
б) Плошча раўнабедранага трохвугольніка роўна 16 см^2, вугал пры аснове роўны 15°. Знайдзіце даўжыню бакавой стараны трохвугольніка.

59. Выведзіце формулу плошчы роўнастаронняга трохвугольніка $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, выкарыстаўшы формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

60. У ромба $ABCD$ $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Дакажыце, што $S_{ABCD} = a^2\sin\alpha$.

61. а) Плошча раўнабедранай трапецыі роўна $36\sqrt{3}$ см^2, вугал паміж дыяганаллю і асновай роўны 30°. Знайдзіце даўжыню дыяганалі трапецыі.
б) Знайдзіце плошчу раўнабедранай трапецыі з дыяганаллю, роўнай 12 см, і вуглом паміж дыяганаллю і стараной асновы, роўным 15°.

62. а) Дзве стараны трохвугольніка маюць даўжыні a і b. Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча трохвугольніка.

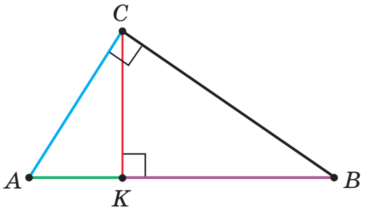
б) Дыяганалі выпуклага чатырохвугольніка роўны d_1 і d_2. Знайдзіце найбольшае магчымае значэнне, якое можа прымаць плошча чатырохвугольніка.

63. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ дыяганалі перасякаюцца ў пункце O. Выкарыстаўшы формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, дакажыце, што $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) у прамавугольным трохвугольніку

Калі для дадатных лікаў a, b і c выконваецца прапорцыя $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то лік b называецца *сярэднім прапарцыянальным лікаў* a і c (паміж лікамі a і c). З дадзенай прапорцыі $b^2 = ac$, адкуль $b = \sqrt{ac}$. У такой форме запісу лік b яшчэ называюць *сярэднім геаметрычным* лікаў a і c.

Прыклад. Лік 4 з'яўляецца сярэднім прапарцыянальным, або сярэднім геаметрычным лікаў 2 і 8, паколькі $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, або $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.



Рыс. 61

У прамавугольным трохвугольніку ABC, дзе $\angle C = 90°$, правядзём вышыню CK (рыс. 61). Адрэзак AK з'яўляецца праекцыяй катэта AC на гіпатэнузу, а адрэзак BK — праекцыяй катэта BC на гіпатэнузу. Катэты, гіпатэнуза, вышыня і праекцыі катэтаў на гіпатэнузу звязаны адносінамі, якія мы сфармулюем у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма (аб сярэднім прапарцыянальным у прамавугольным трохвугольніку).

а) Вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж праекцыямі катэтаў на гіпатэнузу, г. зн. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (гл. рыс. 61).

б) Катэт ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай і праекцыяй гэтага катэта на гіпатэнузу, г. зн. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.