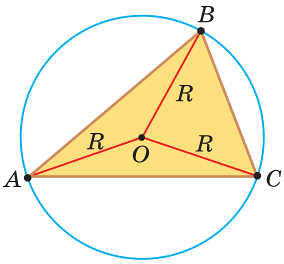
§ 8. Апісаная і ўпісаная акружнасці трохвугольніка

Азначэнне. Акружнасць называецца **апісанай** каля трохвугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні.



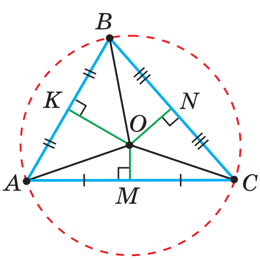
Рыс. 90

На рысунку 90 паказана акружнасць з радыусам R і цэнтрам O, апісаная каля трохвугольніка ABC.

Паколькі $OA = OB = OC = R$, то цэнтр апісанай акружнасці *роўнааддалены ад вяршынь трохвугольніка*.

Замест слоў «акружнасць, апісаная каля трохвугольніка ABC», таксама гавораць «акружнасць, апісаная вакол трохвугольніка ABC», або «апісаная акружнасць трохвугольніка ABC».

Тэарэма (аб акружнасці, апісанай каля трохвугольніка). **Каля любога трохвугольніка можна апісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.**

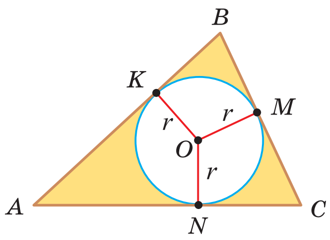


Рыс. 91

Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рыс. 91). Няхай O — пункт перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да яго старон. Правядзём адрэзкі OA, OB і OC. Па ўласцівасці пасярэдняга перпендыкуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Паколькі пункт O роўнааддалены ад усіх вяршынь трохвугольніка ABC, то акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OA праходзіць праз усе вяршыні трохвугольніка ABC, г. зн. з'яўляецца яго апісанай акружнасцю. Адзінасць апісанай акружнасці дакажыце самастойна.

Заўвага. Паколькі ўсе тры пасярэднія перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра апісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых двух з іх.

Азначэнне. Акружнасць называецца **ўпісанай** у трохвугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон.



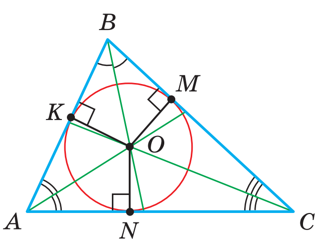
Рыс. 92

На рысунку 92 паказана акружнасць з цэнтрам O і радыусам r, упісаная ў трохвугольнік ABC; K, M і N — пункты яе дотыку да старон трохвугольніка ABC.

Паколькі $OK = OM = ON = r$ і па ўласцівасці датычнай да акружнасці $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то цэнтр упісанай акружнасці *роўнааддалены ад старон трохвугольніка*.

Замест слоў «акружнасць, упісаная ў трохвугольнік ABC», таксама гавораць «упісаная акружнасць трохвугольніка ABC».

Тэарэма (аб акружнасці, упісанай у трохвугольнік).
У любы трохвугольнік можна ўпісаць акружнасць, прычым толькі адну, яе цэнтр знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка.



Рыс. 93

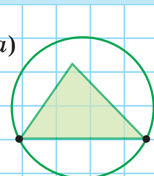
Доказ. Разгледзім адвольны трохвугольнік ABC (рыс. 93). Няхай O — пункт перасячэння яго бісектрыс. Правядзём з пункта O перпендыкуляры OK, OM і ON адпаведна да старон AB, BC і AC. Па ўласцівасці бісектрысы вугла $OK = ON$, $ON = OM$. Акружнасць з цэнтрам у пункце O і радыусам OK будзе праходзіць праз пункты K, M і N і датыкацца да старон AB, BC і AC у дадзеных пунктах па прымеце датычнай. Такім чынам, гэта акружнасць з'яўляецца ўпісанай у трохвугольнік ABC. Адзінасць упісанай акружнасці дакажыце самастойна.

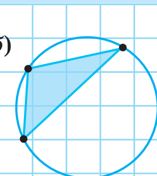
Заўвага. Паколькі ўсе тры бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то для знаходжання цэнтра ўпісанай акружнасці дастаткова пабудаваць пункт перасячэння любых дзвюх з іх.

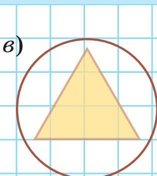
А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

На якім з рысункаў паказана акружнасць, апісаная каля трохвугольніка?

а)


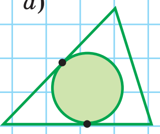
б)


в)


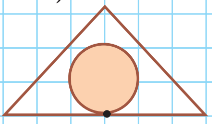
Тэст 2

На якім з рысункаў паказана акружнасць, упісаная ў трохвугольнік?

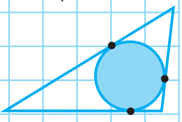
а)



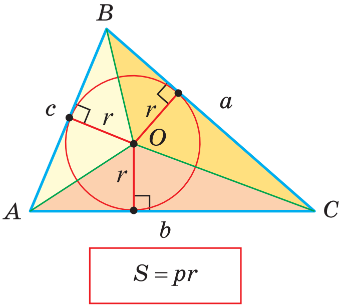
б)



в)



Тэарэма. **Плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = pr$, дзе p — паўперыметр трохвугольніка, r — радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.**



Рыс. 94

Доказ. Няхай дадзены трохвугольнік ABC са старанамі $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — цэнтр яго ўпісанай акружнасці (рыс. 94). Злучым адрэзкамі пункт O з вяршынямі A, B і C. Трохвугольнік ABC разаб'ецца на тры трохвугольнікі: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радыусы r, праведзеныя ў пункты дотыку, будуць вышынямі гэтых трохвугольнікаў. Плошча трохвугольніка ABC роўна суме плошчаў названых трохвугольнікаў: $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$.

Тэарэма даказана.

Вынік.

Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, можна знайсці па формуле

$$r = \frac{S}{p}.$$

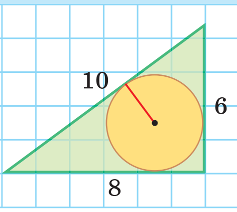
Адной з найважнейшых задач дадзенай тэмы з'яўляецца задача знаходжання радыуса апісанай і радыуса ўпісанай акружнасцей дадзенага трохвугольніка.

А цяпер выканайце **Тэст 3**.

Тэст 3

Выкарыстаўшы формулу $S = pr$, знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 6 см, 8 см, 10 см.

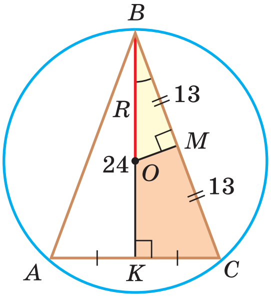
а) 1; б) 2; в) 3; г) 1,5.



Заданні да § 8

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

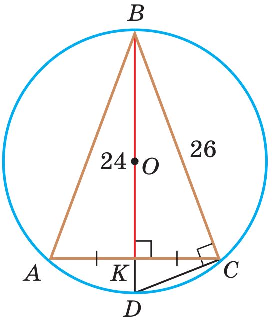
Задача 1. *Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC, у якога $AB = BC = 26$ см, вышыня $BK = 24$ см* (рыс. 95).



Рыс. 95

Рашэнне. *Спосаб* 1 (метад падобнасці). Цэнтр апісанай акружнасці ляжыць на перасячэнні пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка. Правядзём пасярэднія перпендыкуляры да старон AC і BC, якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры апісанай акружнасці. Паколькі ў раўнабедраным трохвугольніку вышыня, праведзеная да асновы, з'яўляецца медыянай, то BK — пасярэдні перпендыкуляр да стараны AC. Няхай MO — пасярэдні перпендыкуляр да стараны BC. Тады $BM = 13$ см, $BO = R$ — шуканы радыус. Паколькі $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (як прамавугольныя з агульным вострым вуглом CBK), то $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$, $\frac{13}{R} = \frac{24}{26}$, адкуль $R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14\frac{1}{12}$ (см).

Спосаб 2 (трыганаметрычны метад). З трохвугольніка OBM (гл. рыс. 95) $\cos\angle OBM = \frac{BM}{BO}$, з трохвугольніка CBK $\cos\angle CBK = \frac{BK}{BC}$, адкуль $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.



Рыс. 96

Спосаб 3 (сярэдняе прапарцыянальнае). Прадоўжым вышыню BK да перасячэння з апісанай акружнасцю ў пункце D (рыс. 96). Паколькі цэнтр апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка ляжыць на прамой BK (гл. спосаб 1), то $BD = 2R$ — дыяметр дадзенай акружнасці. У прамавугольным трохвугольніку BCD ($\angle BCD = 90°$ як упісаны, які абапіраецца на дыяметр) катэт BC ёсць сярэдняе прапарцыянальнае паміж гіпатэнузай BD і праекцыяй BK катэта BC на гіпатэнузу. Таму $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$. Адкуль $R = 14\frac{1}{12}$ см.

Адказ: $14\frac{1}{12}$ см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 1 вынікае ўласцівасць: ***«Цэнтр акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы, або на яе прадаўжэнні»***.

Правільнае і адваротнае сцверджанне: ***«Калі цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць на вышыні трохвугольніка або на яе прадаўжэнні, то гэты трохвугольнік раўнабедраны».***

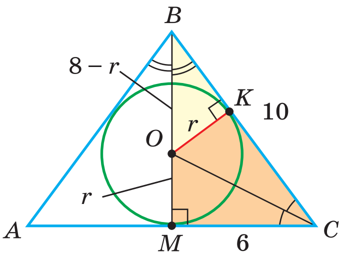
Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Карысна запомніць!

Калі ў ключавой задачы 1 бакавую старану абазначыць b, а вышыню, праведзеную да асновы, — h_a, то атрымаецца прапорцыя $\dfrac{\frac{b}{2}}{R} = \dfrac{h_a}{b}$. Адсюль вынікае зручная формула для знаходжання радыуса акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка:

$$\boxed{R = \frac{b^2}{2h_a}.}$$

Задача 2. *Знайсці радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC, у якога $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.*



Рыс. 97

Р а ш э н н е. *Спосаб* 1 (метад падобнасці). Цэнтр упісанай акружнасці знаходзіцца ў пункце перасячэння бісектрыс трохвугольніка. Правядзём у трохвугольніку ABC бісектрысы з вяршынь B і C, якія перасякуцца ў пункце O — цэнтры ўпісанай акружнасці (рыс. 97). Бісектрыса BM, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка ABC, будзе яго вышынёй і медыянай, адрэзак CO — бісектрыса вугла C, $OM = r$ — шуканы радыус упісанай акружнасці. Паколькі $AM = MC = 6$ см, то з трохвугольніка BMC па тэарэме Піфагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), адкуль $BO = BM - OM = 8 - r$. Правядзём радыус OK у пункт дотыку акружнасці са старанай BC, $OK \perp BC$. З падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў BKO і BMC ($\angle MBC$ — агульны) вынікае: $\dfrac{OK}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$. Тады $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{6}{10}$, $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{3}{5}$, $5r = 3(8-r)$, $8r = 24$, $r = 3$. Шуканы радыус OM роўны 3 см.

Спосаб 2 (трыганаметрычны метад). З трохвугольніка OBK (гл. рыс. 97) $\sin\angle OBK = \dfrac{OK}{OB}$, з трохвугольніка MBC $\sin\angle MBC = \dfrac{MC}{BC}$, адкуль $\dfrac{OK}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$. Далейшае рашэнне супадае з прыведзеным у спосабе 1.

Спосаб 3 (уласцівасць бісектрысы трохвугольніка). CO — бісектрыса трохвугольніка BMC. Вядома, што бісектрыса трохвугольніка дзеліць процілеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам. Таму $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$, $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{6}{10}$, адкуль $r = 3$. Шуканы радыус роўны 3 см.

Спосаб 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2); $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см). З формулы плошчы трохвугольніка $S = pr$ вынікае: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).

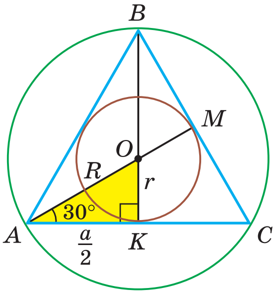
Адказ: 3 см.

Заўвага. З рашэння ключавой задачы 2 вынікае ўласцівасць: ***«Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, ляжыць на яго вышыні, праведзенай да асновы».***

Правільнае і адваротнае сцверджанне: ***«Калі цэнтр акружнасці, упісанай у трохвугольнік, ляжыць на вышыні трохвугольніка, то гэты трохвугольнік раўнабедраны».***

Адваротнае сцверджанне дакажыце самастойна.

Задача 3. *Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са стараной a. Знайсці радыус R яго апісанай і радыус r яго ўпісанай акружнасцей.*



Рыс. 98

Рашэнне. *Спосаб* 1 (трыганаметрычны метад). Паколькі ў роўнастароннім трохвугольніку бісектрысы з'яўляюцца і вышынямі, і медыянамі, то яго бісектрысы ляжаць на пасярэдніх перпендыкулярах да старон трохвугольніка. Таму *ў роўнастароннім трохвугольніку цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей супадаюць.*

Разгледзім роўнастаронні трохвугольнік ABC са стараной a, у якога вышыні AM і BK перасякаюцца ў пункце O — цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей (рыс. 98). Тады $OA = OB = R$ — радыусы апісанай, $OK = OM = r$ — радыусы ўпісанай акружнасці. Паколькі AM — бісектрыса і $\angle BAC = 60°$, то $\angle OAK = 30°$. Паколькі BK — вышыня і медыяна, то $AK = \frac{a}{2}$. З трохвугольніка AKO $\cos 30° = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. У трохвугольніку AKO катэт OK ляжыць насупраць вугла ў 30°, таму $OK = \frac{1}{2}AO$, $r = \frac{1}{2}R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Спосаб 2 (уласцівасць медыян). Паколькі AM і BK — медыяны трохвугольніка ABC (гл. рыс. 98), то па ўласцівасці медыян $BO : OK = 2 : 1$. Вышыню роўнастаронняга трохвугольніка можна знайсці па формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Адкуль $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$r = OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Адказ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

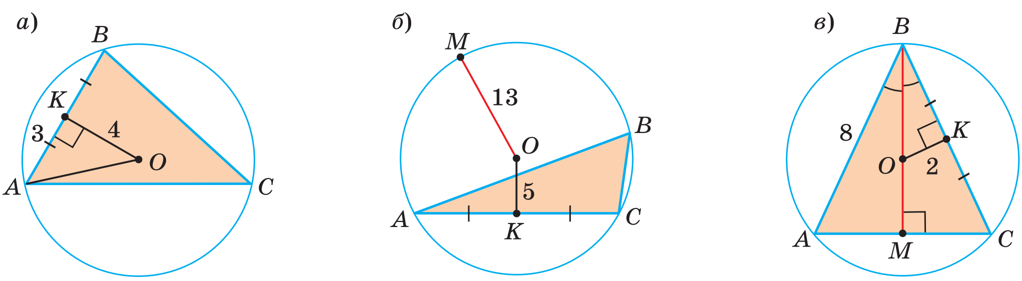
Карысна запомніць!

Паколькі радыус апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $\boxed{R = \frac{a}{\sqrt{3}}}$, то $\boxed{a = R\sqrt{3}.}$ Значыць, старана роўнастаронняга трохвугольніка ў $\sqrt{3}$ раза большая за радыус яго апісанай акружнасці. Каб знайсці радыус R апісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка, трэба старану a падзяліць на $\sqrt{3}$, а каб знайсці яго старану a, трэба радыус R памножыць на $\sqrt{3}$. Радыус упісанай акружнасці роўнастаронняга трохвугольніка $\boxed{r = \frac{1}{2}R.}$

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

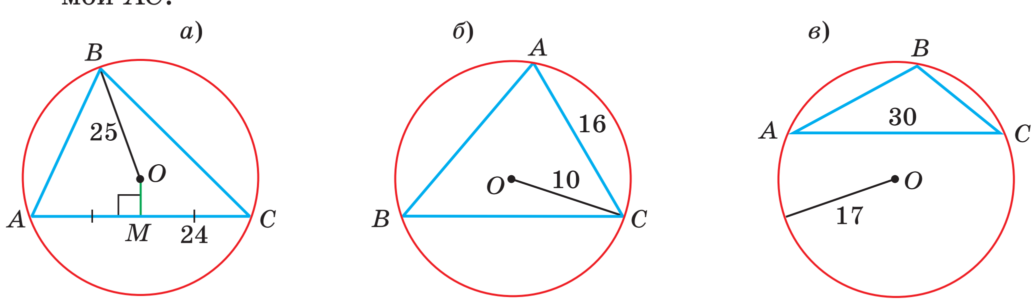
86. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O.

а) Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, *а*).
б) Знайдзіце старану AC, калі K — яе сярэдзіна, $K = 5$ (рыс. 99, *б*).
в) Знайдзіце радыус апісанай акружнасці (рыс. 99, *в*).



Рыс. 99

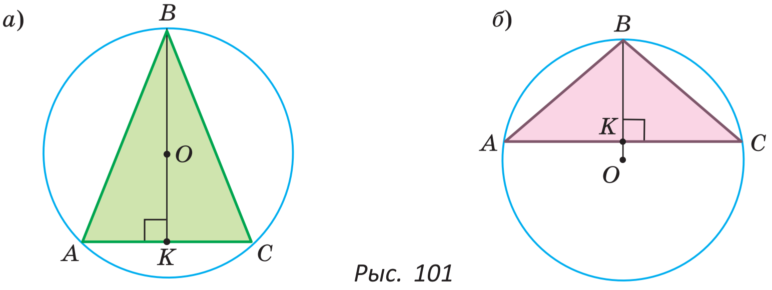
87. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць. Па даных на рысунках 100, *а*)—*в*) знайдзіце адлегласць ад цэнтра O акружнасці да прамой AC.



Рыс. 100

88. Выкарыстаўшы ключавую задачу 1 (с. 60), знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC і вышынёй BK, калі:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рыс. 101, *а*);
б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рыс. 101, *б*).

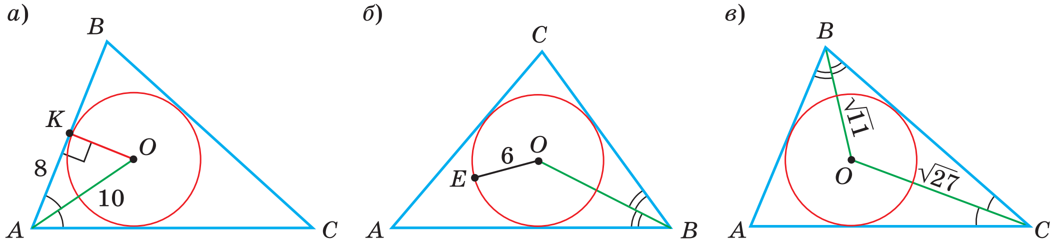


Рыс. 101

89. Радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка, роўны 5 см, вышыня, праведзеная да яго асновы, роўна 8 см. Знайдзіце плошчу дадзенага трохвугольніка.

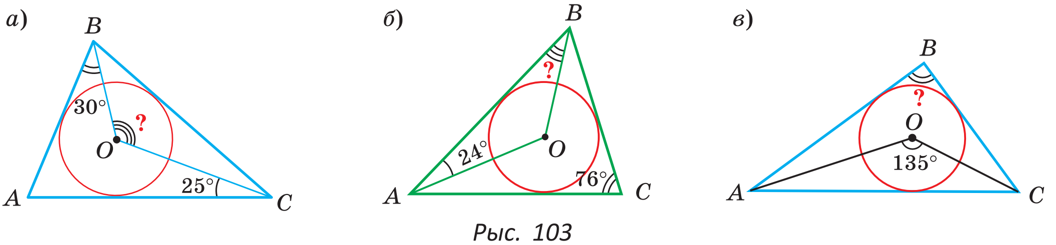
90. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O.

а) Па рысунку 102, *а*) вызначце радыус упісанай акружнасці.
б) Па рысунку 102, *б*) вызначце даўжыню адрэзка OB, калі $\angle ABC = 60°$.
в) Па рысунку 102, *в*) вызначце даўжыню стараны BC, калі дыяметр упісанай акружнасці роўны $\sqrt{8}$.



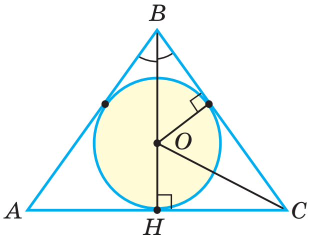
Рыс. 102

91. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O. Па даных на рысунках 103, *а*)—*в*) вызначце велічыню вугла, абазначанага пытальнікам.

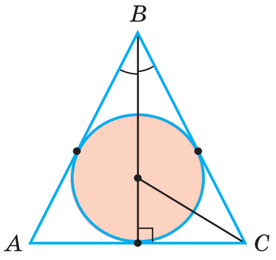


Рыс. 103

92. а) Выкарыстаўшы ключавую задачу 2 (с. 61), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 6$ см і вышынёй $BH = 4$ см, праведзенай да асновы (рыс. 104).
б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай $AC = 10$ см і бакавой стараной $AB = 13$ см (рыс. 105).



Рыс. 104



Рыс. 105

93. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік са стараной, роўнай $4\sqrt{3}$ см. Вылічыце:

а) радыус апісанай акружнасці гэтага трохвугольніка;
б) радыус упісанай акружнасці гэтага трохвугольніка.

94. а) Знайдзіце радыус R апісанай і радыус r упісанай акружнасцей роўнастаронняга трохвугольніка, калі яго вышыня $h = 12$ см.
б) Знайдзіце плошчу роўнастаронняга трохвугольніка, калі радыус R яго апісанай акружнасці роўны 2 см.

95. а) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі апішыце акружнасць каля тупавугольнага трохвугольніка.
б) Пры дапамозе цыркуля і лінейкі ўпішыце акружнасць у прамавугольны трохвугольнік.

96. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC, $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120°$. Вызначце:

а) радыус яго апісанай акружнасці;
б) радыус яго ўпісанай акружнасці.

97. а) Знайдзіце плошчу трохвугольніка, у якога перыметр роўны 24 см, а радыус упісанай акружнасці — 2 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік, плошча якога роўна 48 см^2, а перыметр — 32 см.

98. Дадзены раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай AC, O_1 — цэнтр апісанай, O_2 — цэнтр упісанай акружнасці. Знайдзіце даўжыню адрэзка O_1O_2, калі $AB = 20$ см, вышыня $BH = 16$ см.

99. а) Акружнасць, упісаная ў раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць пунктам дотыку яго бакавую старану на адрэзкі, роўныя 6 см і 4 см, лічачы ад асновы. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік.
б) Цэнтр акружнасці, упісанай у раўнабедраны трохвугольнік, дзеліць яго вышыню, праведзеную да асновы, у адносіне 4 : 5, лічачы ад асновы. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, калі яго бакавая старана роўна 20 см.

100. Косінус вугла пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўны 0,8, перыметр трохвугольніка роўны 54 см. Знайдзіце:

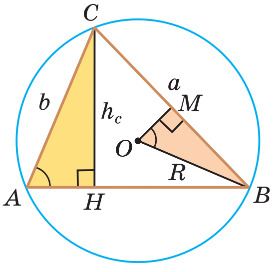
а) радыус яго ўпісанай акружнасці;
б) радыус яго апісанай акружнасці.

101. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам O, якая датыкаецца да яго старон AB, BC і AC адпаведна ў пунктах M, N і K. Знайдзіце:

а) $\angle MNK$, калі $\angle A = 70°$;
б) $\angle AOB$, калі $\angle KMN = 64°$.

102. Акружнасць з цэнтрам у пункце O апісана каля трохвугольніка ABC (рыс. 106), $OB = R$ — радыус акружнасці, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — вышыня, $OM \perp BC$. Дакажыце, што:

а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.



Рыс. 106

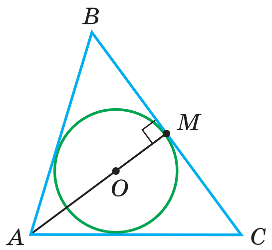
103. а) У трохвугольніку ABC $\angle A = 30°$, $BC = 6$ см. Знайдзіце дыяметр акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.
б) У трохвугольніку ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, вышыня $BH = 8$ см. Знайдзіце радыус R апісанай акружнасці.

104. У трохвугольніку ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Акружнасць, упісаная ў трохвугольнік, датыкаецца да названых старон адпаведна ў пунктах M, N, K. Знайдзіце:

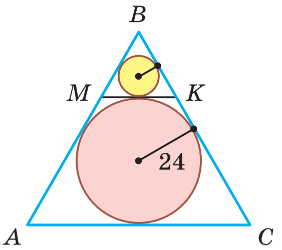
а) даўжыню адрэзка AK;
б) $AK + MB + NC$.

105. У трохвугольнік ABC упісана акружнасць з цэнтрам у пункце O (рыс. 107), вышыня AM праходзіць праз пункт O, $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Знайдзіце радыус упісанай акружнасці.

106. У роўнастаронні трохвугольнік ABC упісана акружнасць, радыус якой роўны 24. Адрэзак MK датыкаецца да гэтай акружнасці



Рыс. 107



Рыс. 108

і паралельны старане AC (рыс. 108). Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік MBK.

107. Дакажыце, што калі цэнтры апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка супадаюць, то гэты трохвугольнік роўнастаронні.

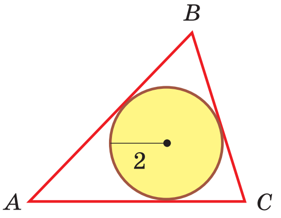
108. а) Дакажыце, што каля дадзенага трохвугольніка можна апісаць толькі адну акружнасць.
б) Дакажыце, што ў дадзены трохвугольнік можна ўпісаць толькі адну акружнасць.

109. Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC, H — пункт перасячэння яго вышынь (артацэнтр), O — цэнтр апісанай акружнасці. Пункты O, H, A і C ляжаць на адной акружнасці. Знайдзіце велічыню вугла B.

Гімнастыка розуму

Радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC (рыс. 109), роўны 2 см, плошча трохвугольніка $S = 2025$ см^2. Знайдзіце вусна перыметр P трохвугольніка ABC.

Якую ўласцівасць, на ваш погляд, мае трохвугольнік, у якога радыус упісанай акружнасці роўны 2? Абгрунтуйце ваша меркаванне.

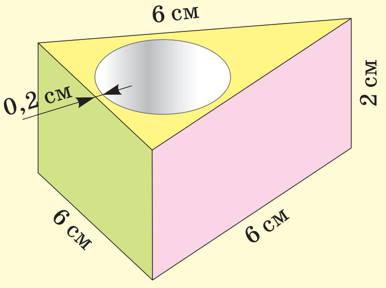


Рыс. 109

Геаметрыя 3D

Загатоўка ўяўляе сабой правільную трохвугольную прызму вышынёй 2 см, у аснове якой ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной 6 см (рыс. 110). У цэнтры загатоўкі трэба зрабіць цыліндрычную адтуліну. Адлегласць ад акружнасці адтуліны да стараны асновы роўна 0,2 см.

Заданне 1. Знайдзіце (акругліўшы вынік да 1 мм) дыяметр свердла для свідравання патрэбнай адтуліны.



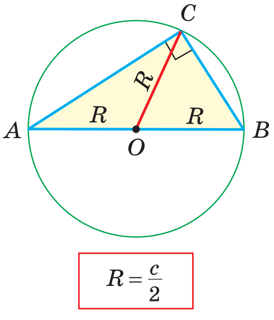
Рыс. 110

Заданне 2. Па формуле аб'ёму цыліндра $V_{ц} = \pi R^2 H$, дзе R — радыус асновы, H — вышыня цыліндра, знайдзіце аб'ём цыліндрычнай адтуліны. Прыміце $\pi \approx 3{,}14$. Адказ акругліце да 1 см^3.

Заданне 3. Улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны здабытку яе плошчы асновы на вышыню, г. зн. $V_{пр} = S_{асн} \cdot H$, вылічыце, колькі працэнтаў складае аб'ём цыліндрычнай адтуліны ад аб'ёму прызмы. Адказ акругліце да 1 %.

§ 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

Тэарэма. **Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы, г. зн.** $R = \frac{c}{2}$, **дзе** c **— гіпатэнуза.**



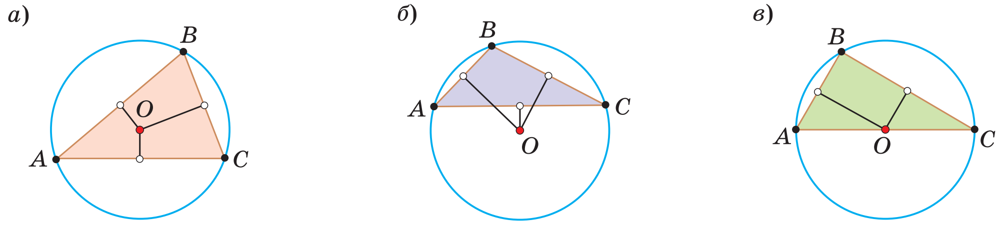
Рыс. 111

Доказ. Правядзём у прамавугольным трохвугольніку ABC медыяну CO да гіпатэнузы AB (рыс. 111). Паколькі медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, то $OC = OA = OB$. Тады сярэдзіна гіпатэнузы — пункт O — роўнааддалены ад пунктаў A, B і C і таму з'яўляецца цэнтрам апісанай акружнасці трохвугольніка ABC. Радыус гэтай акружнасці $R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$, дзе c — гіпатэнуза.

Тэарэма даказана.

Заўвага. Спосаб 2. Можна даказаць, што пасярэднія перпендыкуляры да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка перасякаюцца на сярэдзіне гіпатэнузы.

Адзначым, што ў вострavугольнага трохвугольніка цэнтр апісанай акружнасці ляжыць унутры трохвугольніка (рыс. 112, *а*), у тупавугольнага — па-за трохвугольнікам (рыс. 112, *б*), у прамавугольнага — на сярэдзіне гіпатэнузы (рыс. 112, *в*). Абгрунтуйце першыя два сцверджанні самастойна.



Рыс. 112