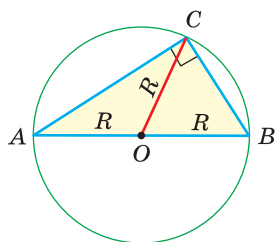


**Заданне 2.** Па формуле аб'ёму цыліндра  $V_{ц} = \pi R^2 H$ , дзе  $R$  — радыус асновы,  $H$  — вышыня цыліндра, знайдзіце аб'ём цыліндрычнай адтуліны. Прыміце  $\pi \approx 3,14$ . Адказ акругліце да  $1 \text{ см}^3$ .

**Заданне 3.** Улічыўшы, што аб'ём прызмы роўны здабытку яе плошчы асновы на вышыню, г. зн.  $V_{пр} = S_{асн} \cdot H$ , вылічыце, колькі працэнтаў складае аб'ём цыліндрычнай адтуліны ад аб'ёму прызмы. Адказ акругліце да  $1 \%$ .

## § 9. Прамавугольны трохвугольнік і яго апісаная і ўпісаная акружнасці

**Тэарэма.** Цэнтр акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, ляжыць на сярэдзіне гіпатэнузы, а яе радыус роўны палавіне гіпатэнузы, г. зн.  $R = \frac{c}{2}$ , дзе  $c$  — гіпатэнуза.



$$R = \frac{c}{2}$$

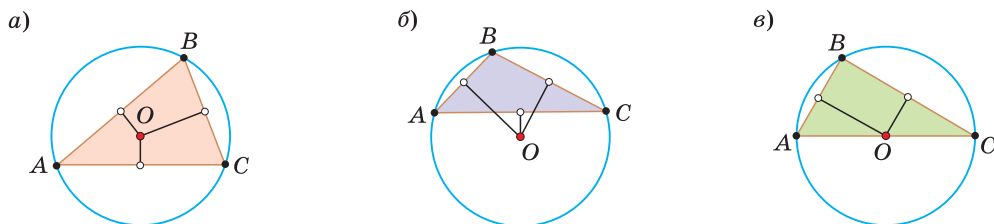
Рыс. 111

**Доказ.** Правядзём у прамавугольным трохвугольніку  $ABC$  медыяну  $CO$  да гіпатэнузы  $AB$  (рыс. 111). Паколькі медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палавіне гіпатэнузы, то  $OC = OA = OB$ . Тады сярэдзіна гіпатэнузы — пункт  $O$  — роўнааддалены ад пунктаў  $A$ ,  $B$  і  $C$  і таму з'яўляецца цэнтрам апісанай акружнасці трохвугольніка  $ABC$ . Радыус гэтай акружнасці  $R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$ , дзе  $c$  — гіпатэнуза.

Тэарэма даказана.

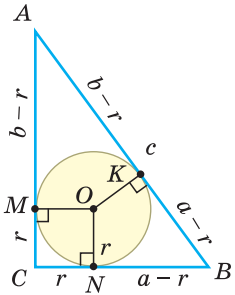
**Заўвага. Спосаб 2.** Можна даказаць, што пасярэднія перпендыкуляры да катэтаў прамавугольнага трохвугольніка перасякаюцца на сярэдзіне гіпатэнузы.

Адзначым, што ў востравугольнага трохвугольніка цэнтр апісанай акружнасці ляжыць унутры трохвугольніка (рыс. 112, а), у тупавугольнага — па-за трохвугольнікам (рыс. 112, б), у прамавугольнага — на сярэдзіне гіпатэнузы (рыс. 112, в). Абгрунтуйце першыя два сцверджанні самастойна.



Рыс. 112

**Тэарэма.** Радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, можна знайсці па формуле  $r = \frac{a+b-c}{2}$ , дзе  $r$  — шуканы радыус,  $a$  і  $b$  — катэты,  $c$  — гіпатэнуза трохвугольніка.



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Рыс. 113

**Доказ.** Разгледзім прамавугольны трохвугольнік  $ABC$  з катэтамі  $BC = a$ ,  $AC = b$  і гіпатэнузай  $AB = c$ . Няхай упісаная ў трохвугольнік акружнасць з цэнтрам  $O$  і радыусам  $r$  датыкаецца да старон трохвугольніка ў пунктах  $M$ ,  $N$  і  $K$  (рыс. 113). Правядзём радыусы ў пункты датыку і атрымаем:  $OM \perp AC$ ,  $ON \perp BC$ ,  $OK \perp AB$ . Чатырхвугольнік  $CMON$  — квадрат, паколькі ў яго ўсе вуглы прамыя і  $OM = ON = r$ . Тады  $CM = CN = r$ ,  $NB = a - r$ ,  $MA = b - r$ . Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то  $BK = BN = a - r$ ,  $AK = AM = b - r$ . Але  $BK + AK = AB$ , г. зн.  $(a - r) + (b - r) = c$ ,  $a + b - 2r = c$ , адкуль  $r = \frac{a+b-c}{2}$ . Тэарэма даказана.

**Вынік.**  $r = p - c$ , дзе  $p$  — паўперыметр трохвугольніка.

**Доказ.** Пераўтворым формулу радыуса ўпісанай акружнасці:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула  $r = p - c$  у спалучэнні з формуламі  $S = pr$  і  $R = \frac{c}{2}$  дае

магчымасць рашаць многія задачы, звязаныя з прамавугольным трохвугольнікам, алгебраічным метадам.

**Прыклад.** Дадзены прамавугольны трохвугольнік,  $S = 24$ ,  $R = 5$ . Знайсці  $r$ .

Рашэнне. Паколькі  $r = p - c$ , а  $R = \frac{c}{2}$ , то  $p = r + c = r + 2R = r + 10$ . З формулы  $S = pr$  вынікае  $24 = (r + 10)r$ ,  $r^2 + 10r - 24 = 0$ . Па тэарэме Віета (адваротнай)  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = -12$  — пабочны карань, тады  $r = 2$ .

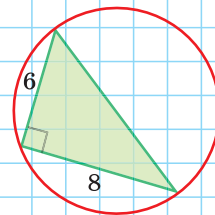
Адказ: 2.

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

### Тэст 1

Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

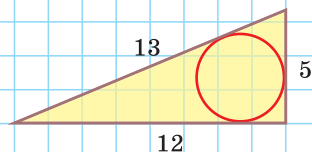
а) 7; б) 10; в) 5; г) 4.



## Тэст 2

Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік.

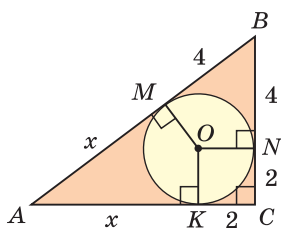
а) 2; б) 3; в) 5; г) 4,5.



## Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ  
ключавыя задачы

**Задача 1.** Знайсці радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, у якога адзін з катэтаў роўны 6, а радыус упісанай акружнасці роўны 2.



Рыс. 114

Рашэнне. *Способ 1* (геаметрычны). Няхай у трохвугольніку  $ABC$ , дзе  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 6$ ,  $r = 2$  — радыус упісанай акружнасці (рыс. 114). Правядзём з цэнтра  $O$  ўпісанай акружнасці перпендыкуляры  $OK$ ,  $OM$  і  $ON$  да старон трохвугольніка, якія будуць радыусамі ўпісанай акружнасці. Паколькі  $KONC$  — квадрат, то  $NC = KC = r = 2$ ,  $BN = 6 - 2 = 4$ .

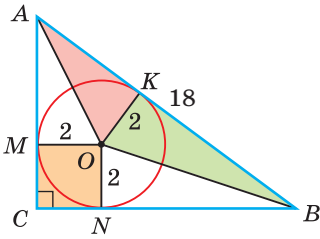
Па ўласцівасці датычных  $BM = BN = 4$ ,  $AM = AK = x$ . Тады  $AC = x + 2$ ,  $AB = x + 4$ . Па тэарэме Піфагора  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ,  $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$ ,  $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$ ,  $4x = 24$ ,  $x = 6$ . Такім чынам,  $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$ .  
Радыус апісанай акружнасці  $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$ .

*Способ 2* (алгебраічны). Падставіўшы ў формулу  $r = \frac{a+b-c}{2}$  значэнні  $r = 2$  і  $a = 6$ , атрымаем  $c = b + 2$ . Па тэарэме Піфагора  $c^2 = a^2 + b^2$ , г. зн.  $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$ ,  $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$ ,  $b = 8$ . Тады  $c = 10$ ,  $R = \frac{c}{2} = 5$ .

Адказ: 5.

**Задача 2.** Гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка  $c = 18$ , радыус упісанай у яго акружнасці  $r = 2$ . Знайсці плошчу трохвугольніка.

Рашэнне. *Способ 1* (геаметрычны). Няхай у трохвугольніку  $ABC$  гіпатэнуза  $AB = c = 18$ ,  $O$  — цэнтр упісанай акружнасці,  $OK$ ,  $OM$ ,  $ON$  — яе радыусы, праведзеныя ў пункты датыку (рыс. 115). Паколькі  $OM \perp AC$ ,



Рыс. 115

$ON \perp BC$ ,  $OK \perp AB$  і  $OM = ON$ , то  $CMON$  — квадрат са стараной, роўнай радыусу  $r$  упісанай акружнасці,  $OK = r$  — вышыня трохвугольніка  $AOB$ . Паколькі адрэзкі датычных, праведзеных з аднаго пункта да акружнасці, роўныя паміж сабой, то  $AK = AM$ ,  $BK = BN$ . Адсюль  $\triangle AKO = \triangle AMO$ ,  $\triangle BKO = \triangle BNO$  па катэце і гіпатэнузе. Плошча трохвугольніка  $ABC$  роўна суме падвоенай плошчы трохвугольніка  $AOB$  і плошчы квадрата  $CMON$ , г. зн.  $S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OK + MO^2 = c \cdot r + r^2 = 18 \cdot 2 + 2^2 = 40$ .

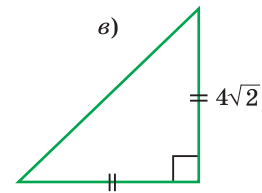
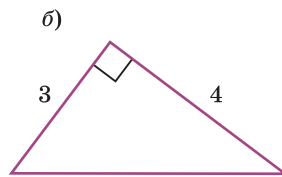
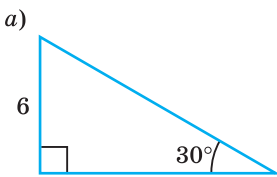
**Спосаб 2** (алгебраічны). З формулы  $r = \frac{a+b-c}{2}$  вынікае  $2 = \frac{a+b-18}{2}$ ,  $a + b = 22$ . Узвядзём абедзве часткі роўнасці ў квадрат:  $(a + b)^2 = 22^2$ ,  $a^2 + 2ab + b^2 = 484$ . Паколькі  $a^2 + b^2 = c^2$  і  $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$ , то  $c^2 + 4S = 484$ ,  $324 + 4S = 484$ ,  $S = 40$ .

**Спосаб 3** (алгебраічны). З формулы  $r = p - c$  вынікае, што  $p = r + c$ . З формулы  $S = pr$  вынікае, што  $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18) \cdot 2 = 40$ .  
Адказ: 40.



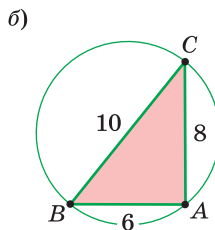
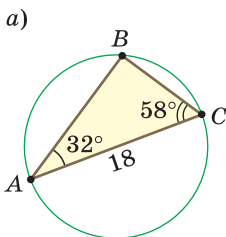
## РАШАЕМ САМАСТОЙНА

**110.** Выкарыстаўшы даныя рысункаў 116, а)–в), знайдзіце радыус апісанай акружнасці трохвугольніка.

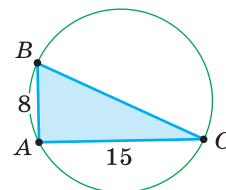


Рыс. 116

**111.** Па даных на рысунках 117, а)–в) знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка  $ABC$ .



в)  $S_{ABC} = 60$



Рыс. 117

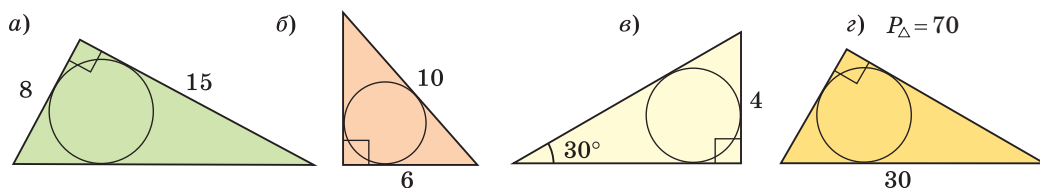
- 112.** Знайдзіце радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі:  
 а) 12 см і 16 см;                      б) 18 м і 24 м;  
 в) 14 дм і 48 дм;                      г) 1 км і 2 км.

- 113.** а) Знайдзіце плошчу прамавугольнага трохвугольніка  $ABC$ , калі ў яго адзін з катэтаў роўны 6 см, а радыус апісанай акружнасці — 5 см.  
 б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля прамавугольнага трохвугольніка, адзін з катэтаў якога роўны 8 см, а сінус процілеглага яму вугла роўны  $\frac{2}{3}$ .

- 114.** Выкарыстаўшы формулу  $r = \frac{a+b-c}{2}$ , знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік з катэтамі  $a$  і  $b$  і гіпатэнузаў  $c$ , калі:

- а)  $a = 3$  см,  $b = 4$  см;                      б)  $a = 5$  дм,  $b = 12$  дм;  
 в)  $a = 7$  см,  $c = 25$  см;                      г)  $a = 4$  м,  $c = 4\sqrt{2}$  м.

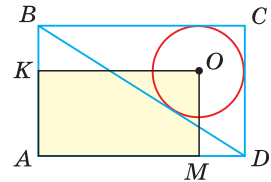
- 115.** Выкарыстаўшы даныя рысункаў 118, а)–г), знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.



Рыс. 118

- 116.** Адлегласць ад цэнтра акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік, да гіпатэнузы роўна 6 см. Знайдзіце адлегласць ад гэтага цэнтра да вяршыні прамога вугла.
- 117.** Знайдзіце катэты прамавугольнага трохвугольніка, калі ўпісаная акружнасць пунктам дотыку дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 5 см і 12 см.
- 118.** Радыус апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка роўны 13 см, упісанай — 4 см. Знайдзіце перыметр і плошчу трохвугольніка.
- 119.** а) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна  $24 \text{ см}^2$ , радыус яго ўпісанай акружнасці роўны 2 см. Знайдзіце дыяметр апісанай акружнасці трохвугольніка.  
 б) Плошча прамавугольнага трохвугольніка роўна  $30 \text{ см}^2$ , радыус яго апісанай акружнасці роўны 6,5 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у гэты трохвугольнік.
- 120.** Знайдзіце перыметр прамавугольнага трохвугольніка, у якога гіпатэнуза  $c = 14$  см, а радыус упісанай акружнасці  $r = 1$  см.

121. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка са старанамі, роўнымі 12 см, 16 см і 20 см.
122. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 9 см і 16 см. Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у дадзены трохвугольнік.
123. а) У прамавугольным трохвугольніку пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя 3 см і 4 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.  
б) Дакажыце, што калі пункт дотыку ўпісанай акружнасці дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі, роўныя  $m$  і  $n$ , то плошчу трохвугольніка можна знайсці па формуле  $S = mn$ .
124.  $ABCD$  — прамавугольнік (рыс. 119), у трохвугольнік  $BCD$  упісана акружнасць з цэнтрам  $O$ . Дакажыце, што плошча прамавугольніка  $AKOM$  роўна палавіне плошчы прамавугольніка  $ABCD$ .



Рыс. 119



Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце *формулу Эйлера*, якая звязвае адлегласць паміж цэнтрамі ўпісанай і апісанай акружнасцей з іх радыусамі.

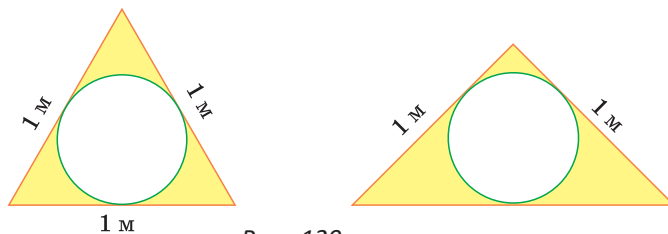
### Рэальная геаметрыя

З двух лістоў МДФ, адзін з якіх мае форму роўнастаронняга трохвугольніка са стараной 1 м, другі — форму прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 1 м (рыс. 120), трэба вырабіць круглую сталёную для часопіснага стала. Для гэтага з кожнага ліста неабходна выказаць па адным крузе найбольшага дыяметра.



Правядзіце разлікі і высветліце:

- а) з якога ліста будзе выразаны круг большага дыяметра;  
б) якім у кожным выпадку будзе працэнт адходаў, калі вядома, што плошчу круга можна знайсці па формуле  $S = \pi R^2$ , дзе  $\pi \approx 3,14$ .



Рыс. 120

**Цікава ведаць.** ААТ «Рэчыцадрэў» — дрэваапрацоўчае прадпрыемства ў Гомельскай вобласці Рэспублікі Беларусь, якое вырабляе розную прадукцыю з драўніны, драўняна-стружкавыя пліты, у тым ліку пліты МДФ (драўняна-валакністыя пліты з вельмі дробнага драўнянага пілавіння), паліўныя брыкеты, сінтэтычныя смолы. Доля экспартных паставак прадпрыемства дасягае 85 %.



## ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

### Ведаем

1. Азначэнне апісанай і ўпісанай акружнасцей трохвугольніка.
2. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай, а дзе — цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Дзе знаходзіцца цэнтр апісанай акружнасці прамавугольнага трохвугольніка і чаму роўны яе радыус  $R$ .
4. Формулу радыуса  $r$  акружнасці, упісанай у прамавугольны трохвугольнік.
5. Формулу плошчы трохвугольніка, звязаную з радыусам  $r$  упісанай акружнасці.

### Умеем

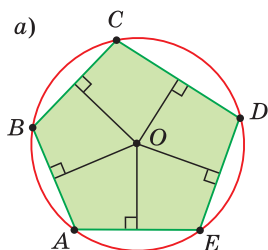
1. Знаходзіць цэнтр апісанай акружнасці трохвугольніка.
2. Знаходзіць цэнтр упісанай акружнасці трохвугольніка.
3. Выводзіць формулу  $S = pr$ .
4. Даказваць, што  $R = \frac{c}{2}$  для прамавугольнага трохвугольніка.
5. Выводзіць формулу  $r = \frac{a+b-c}{2}$  для прамавугольнага трохвугольніка.

## § 10. Упісаня і апісаня чатырохвугольнікі

**Азначэнне.** Акружнасць называецца **апісанай** каля многавугольніка, калі яна праходзіць праз усе яго вяршыні. Пры гэтым многавугольнік называецца **ўпісаным у акружнасць**.

Акружнасць называецца **ўпісанай** у многавугольнік, калі яна датыкаецца да ўсіх яго старон. Пры гэтым многавугольнік называецца **апісаным каля акружнасці**.

Пяцівугольнік  $ABCDE$  (рыс. 121, а) з'яўляецца ўпісаным у акружнасць, а чатырохвугольнік  $MNPK$  (рыс. 121, б) — апісаным каля акружнасці.



Рыс. 121

