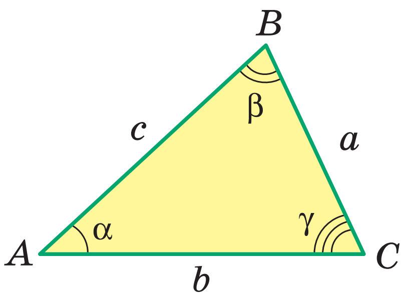
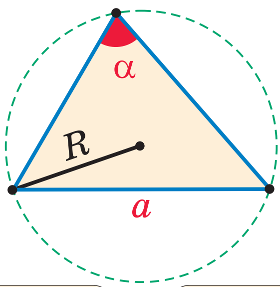
Тэарэма сінусаў і тэарэма косінусаў



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

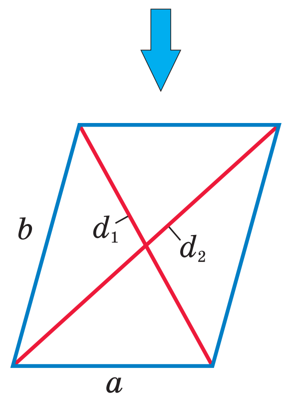


$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

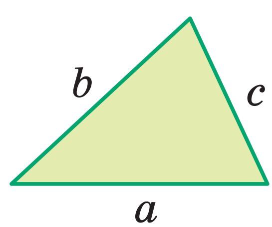
R

Уласцівасці дыяганалей паралелаграма



$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$$

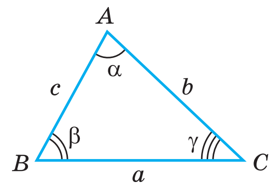
Формула Герона



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

§ 12. Тэарэма сінусаў

Вы ўжо ведаеце, што ў трохвугольніку насупраць большай стараны ляжыць большы вугал, а насупраць большага вугла — большая старана. Няхай a, b, c — стораны, α, β, γ — процілеглыя ім вуглы трохвугольніка ABC адпаведна (рыс. 151). Калі старана a — найбольшая, b — сярэдняя, c — найменшая, то вугал α — найбольшы, β — сярэдні, γ — найменшы. Установім дакладную сувязь паміж даўжынёй стараны трохвугольніка і велічынёй процілеглага ёй вугла.

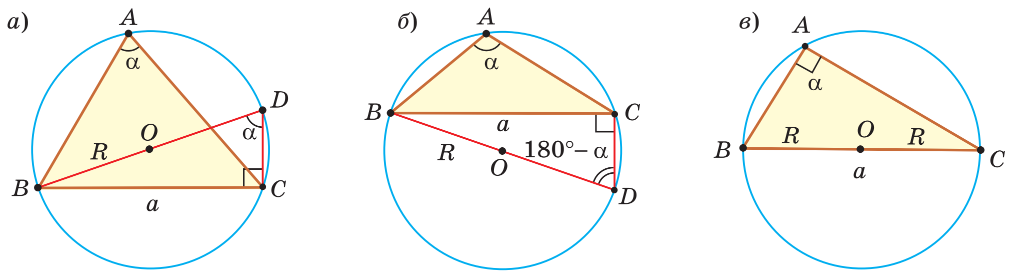


Рыс. 151

Тэарэма сінусаў. **Стораны трохвугольніка прапарцыянальны сінусам процілеглых вуглоў. Адносіна стараны трохвугольніка да сінуса процілеглага вугла роўна падвоенаму радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, г. зн.**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Д о к а з. Няхай дадзены трохвугольнік ABC, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, R — радыус яго апісанай акружнасці. Вугал α можа быць вострым, тупым або прамым. Разгледзім гэтыя выпадкі асобна.



Рыс. 152

1) Вугал α востры (рыс. 152, *а*). Правёўшы дыяметр BD і адрэзак DC, атрымаем прамавугольны трохвугольнік BCD, у якім $\angle BCD = 90°$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр. Заўважым, што $\angle D = \angle A = \alpha$ як упісаныя вуглы, якія абапіраюцца на адну і тую ж дугу BC. З прамавугольнага $\triangle BCD$ знаходзім $\sin D = \frac{BC}{BD}$, г. зн. $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

2) Вугал α тупы (рыс. 152, *б*). Правядзём дыяметр BD і адрэзак DC. У чатырохвугольніку $ABDC$ па ўласцівасці ўпісанага чатырохвугольніка $\angle D = 180° - \alpha$. З прамавугольнага трохвугольніка BCD ($\angle BCD = 90°$ як упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$.

Паколькі $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, адкуль $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справядлівасць роўнасці $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ дакажыце самастойна.

З прычыны даказанага $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, адкуль $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} =$
$= \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Тэарэма даказана.

Тэарэма сінусаў дае магчымасць рашаць шырокае кола задач.

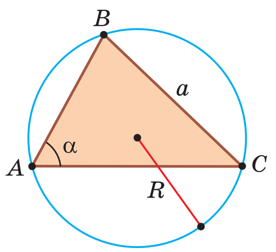
Так, прапорцыя $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ дазваляе рашыць *дзве* наступныя задачы:

- ведаючы дзве стараны трохвугольніка і вугал, процілеглы адной з іх, знайсці сінус вугла, процілеглага другой старане;
- ведаючы два вуглы трохвугольніка і старану, процілеглую аднаму з гэтых вуглоў, знайсці старану, процілеглую другому вуглу.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = 2R}$$

Пры дапамозе формулы $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ можна рашыць яшчэ *тры* задачы (рыс. 153):

- ведаючы старану трохвугольніка і процілеглы ёй вугал, знайсці радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка;
- ведаючы вугал трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці, знайсці старану трохвугольніка, процілеглую дадзенаму вуглу;
- ведаючы старану трохвугольніка і радыус яго апісанай акружнасці, знайсці сінус вугла, процілеглага дадзенай старане.



Рыс. 153

А цяпер выканайце **Тэст 1** і **Тэст 2**.

Тэст 1

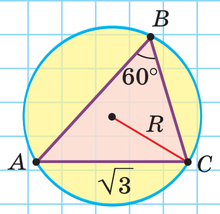
Знайдзіце старану x трохвугольніка на рысунку, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў: $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{7}{\sin 30^\circ}$.

а) 14; б) 21; в) $7\sqrt{2}$; г) 10.

Тэст 2

Знайдзіце велічыню радыуса R на рысунку, выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

а) 1; б) 2; в) $\sqrt{3}$; г) 3.



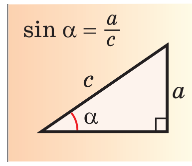
Паўтарэнне

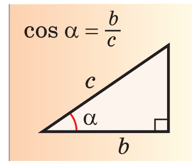
1) $\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2},}$ $\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$

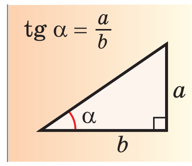
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$

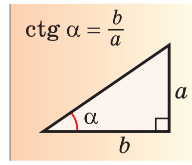
2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\quad \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2},}$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$









3) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$

4) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$

Заданні да § 12

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

Задача 1. *У востравугольным трохвугольніку вядомы стораны* $a = 8$, $b = 9$ *і вугал* $\alpha = 60^\circ$. *Знайсці два іншыя вуглы* β *і* γ, *акругліўшы іх значэнні да* 1°, *і трэцюю старану трохвугольніка, акругліўшы яе даўжыню да* $0{,}1$.

Рашэнне. Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, адкуль $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \frac{9 \cdot \sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9 \cdot 0{,}8660}{8} \approx 0{,}9743$. Пры дапамозе калькулятара (табліц) знаходзім $\beta \approx 77^\circ$. Тады $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, адкуль $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}$, $c = \frac{8 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8 \cdot \frac{0{,}6820}{0{,}8660} \approx 6{,}3$.

Адказ: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6{,}3$.

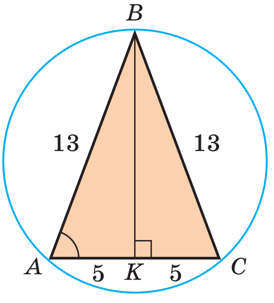
Заўвага. Калі б па ўмове трохвугольнік быў тупавугольным з тупым вуглом β, то, ведаючы $\sin\beta \approx 0{,}9743$, спачатку мы знайшлі б востры вугал $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затым, выкарыстаўшы формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, атрымалі б, што $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

Задача 2. *Даказаць справядлівасць формулы плошчы трохвугольніка* $\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$ *дзе* a, b, c — *яго стораны,* R — *радыус апісанай акружнасці.*

Доказ. Выкарыстаем вядомую формулу плошчы трохвугольніка: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Па тэарэме сінусаў $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, адкуль $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Тады $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Выведзеная формула дазваляе знайсці радыус апісанай акружнасці трохвугольніка: $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Задача 3. *Знайсці радыус R акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC* = 10 *і бакавой стараной BC* = 13 (рыс. 154).



Рыс. 154

Рашэнне. *Спосаб* 1. З формулы $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ вынікае, што $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$. Знойдзем $\sin A$. Для гэтага ў трохвугольніку ABC правядзём вышыню BK, якая будзе і медыянай, адкуль $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. З $\triangle ABK$ па тэарэме Піфагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, адкуль $\sin A = \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{12}{13}$. Тады $2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{13}{\frac{12}{13}} = \dfrac{169}{12}$, $R = \dfrac{169}{2 \cdot 12} = 7\dfrac{1}{24}$.

Спосаб 2. Выкарыстаем формулу $S = \dfrac{abc}{4R}$, з якой $R = \dfrac{abc}{4S}$. Паколькі $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, то $R = \dfrac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \dfrac{169}{24} = 7\dfrac{1}{24}$.

Адказ: $7\dfrac{1}{24}$.

Заўвага. Напомнім, што ў главе II мы знаходзілі радыус R апісанай акружнасці раўнабедранага трохвугольніка, праводзячы пасярэднія перпендыкуляры да яго старон і выкарыстоўваючы падобнасць атрыманых прамавугольных трохвугольнікаў. Таксама мы маглі карыстацца формулай $R = \dfrac{b^2}{2h_a}$, дзе b — бакавая старана, h_a — вышыня, праведзеная да асновы a. Замяніўшы S у формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, атрымаем $R = \dfrac{ab}{2h_c}$ — формулу радыуса апісанай акружнасці для адвольнага трохвугольніка. Такім чынам, мы маем чатыры формулы для знаходжання радыуса R апісанай акружнасці трохвугольніка:

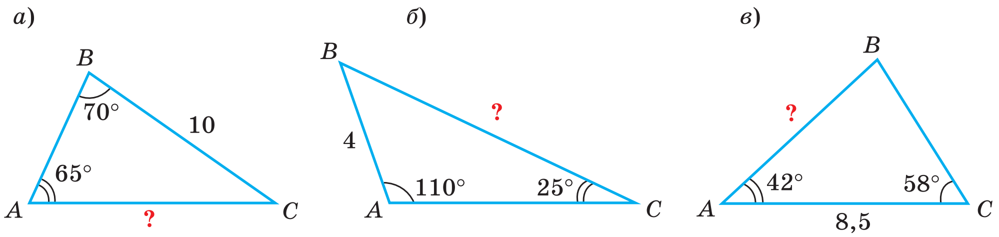
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$,	$R = \dfrac{abc}{4S}$,	$R = \dfrac{ab}{2h_c}$,	$R = \dfrac{b^2}{2h_a}$.
Адвольны трохвугольнік			Раўнабедраны трохвугольнік

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

173. Начарціце ў сшытку і запоўніце табліцу, у якой α і β — вуглы, *a* і *b* — адпаведныя гэтым вуглам стораны трохвугольніка. Для знаходжання невядомых значэнняў карыстайцеся прапорцыяй $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

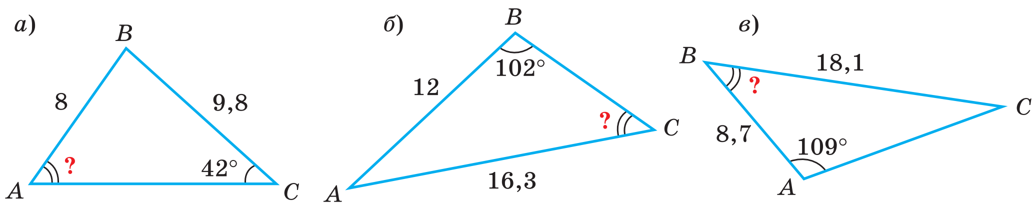
a	4		$\sqrt{6}$
b		6	2
α	30°	45°	120°
β	45°	60°	

174. Па даных на рысунках 155, *а*)—*в*) вылічыце даўжыню стараны трохвугольніка, абазначанай пытальнікам. Пры разліках карыстайцеся калькулятарам (табліцамі), вынік акругліце да 0,1.



Рыс. 155

175. Па даных на рысунках 156, *а*)—*в*) вылічыце пры дапамозе калькулятара (табліц) вугал трохвугольніка, абазначаны пытальнікам. Адказ акругліце да 1°.



Рыс. 156

176. Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка *ABC*. Пры дапамозе тэарэмы сінусаў знайдзіце даўжыню стараны *b* (акругліўшы адказ да 0,1), калі:

а) $a = 4$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$;
б) $a = 6{,}5$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$.

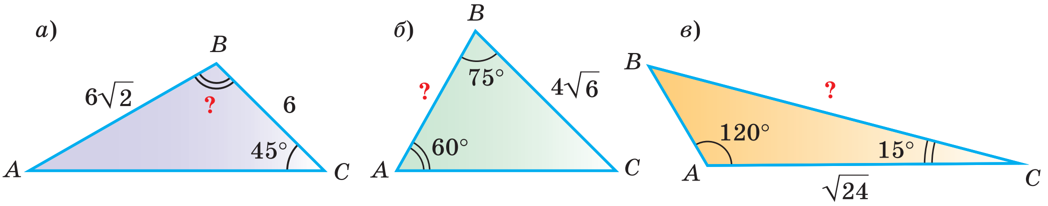
177. Зрабіце схематычны чарцёж трохвугольніка *ABC*. Знайдзіце велічыню вугла *B* трохвугольніка *ABC* (акругліўшы адказ да 1°), калі:

а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62°$;
б) $AB = 4{,}6$, $AC = 4{,}3$, $\angle C = 26°$.

178. У трохвугольніку ABC вядома: $\sin A = 0{,}8$, $\sin B = 0{,}6$, $AC + BC = 28$ см. Знайдзіце даўжыні старон AC і BC.

179. Па даных на рысунках 157, *а*)—*в*) вылічыце:

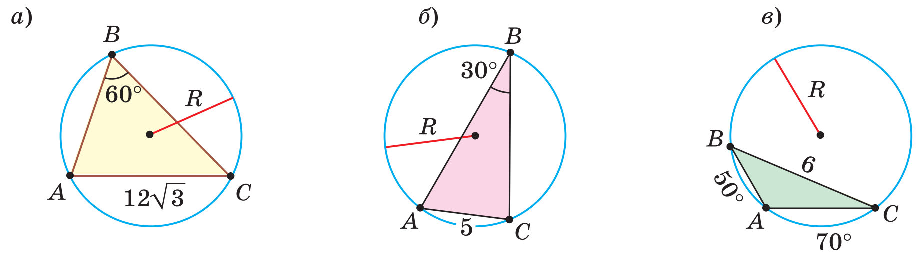
а) $\angle B$; б) AB; в) BC.



Рыс. 157

180. У паралелаграме $ABCD$ $\angle A$ востры, $\sin\angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма, калі $AB = 6$ см.

181. Па даных на рысунках 158, *а*)—*в*) знайдзіце радыус R акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.

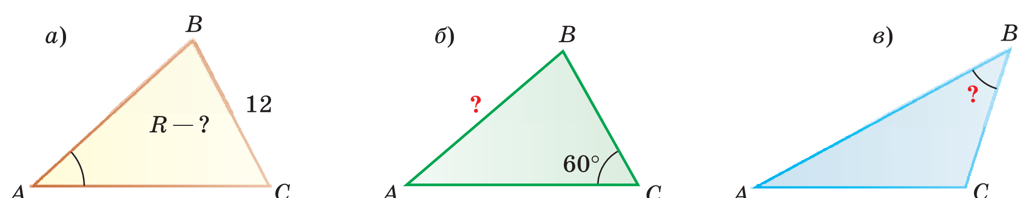


Рыс. 158

182. а) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC (рыс. 159, *а*), калі $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.

б) Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC (рыс. 159, *б*), калі $\angle C = 60°$, а радыус яго апісанай акружнасці $R = 2\sqrt{3}$ см.

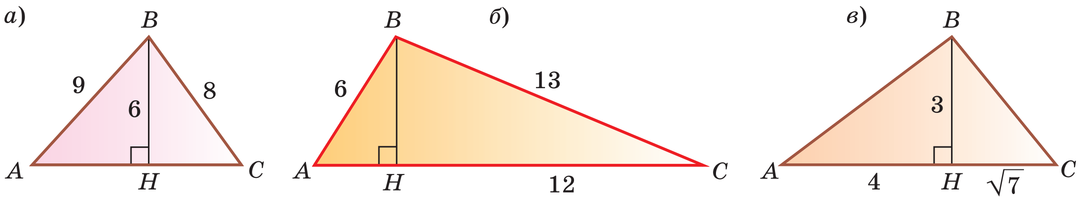
в) Знайдзіце велічыню вострага вугла B трохвугольніка ABC (рыс. 159, *в*), калі $AC = \sqrt{8}$ см, а радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC, роўны 2 см.



Рыс. 159

183. Каля трохвугольніка ABC апісана акружнасць з цэнтрам у пункце O і дыяметрам $16\sqrt{2}$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AB трохвугольніка ABC, калі $\angle BOC = 160°$, $\angle ABC - \angle ACB = 10°$ і $\angle A$ — востры.

184. Па даных на рысунках 160, *а*)—*в*) вылічыце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC.



Рыс. 160

185. а) У трохвугольніку ABC $\angle B = 45°$, $\angle C = 105°$, $BC = 6$ см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

б) Трохвугольнік ABC раўнабедраны, аснова $AC = 8$ см, вугал пры аснове роўны $15°$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка.

в) Дакажыце, што калі адзін з вуглоў трохвугольніка роўны $30°$ або $150°$, то даўжыня стараны трохвугольніка, процілеглай гэтаму вуглу, роўна радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

186. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля раўнабедранага трохвугольніка са старанамі:

а) 10 см, 10 см, 12 см;

б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.

187. У трохвугольніку дадзена старана a і вуглы β, γ. Выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, знайдзіце стораны b і c.

188. Выкарыстаўшы формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля роўнастароннягa трохвугольніка са стараной a.

189. У прамавугольніку $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, M — сярэдзіна стараны AD. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ACM.

190. а) Дадзена раўнабедраная трапецыя $ABCD$ з асновамі AD і BC, дыяганаль $AC = 8\sqrt{3}$ см. Прамень AC з'яўляецца бісектрысай вугла BAD, $\angle ACB = 30°$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.

б) Асновы BC і AD упісанай трапецыі $ABCD$ роўны 11 см і 21 см адпаведна, бакавая старана AB роўна 13 см. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трапецыі.

191. а) Пункт M ляжыць на аснове AC раўнабедранага трохвугольніка ABC. Дакажыце, што радыусы апісаных акружнасцей трохвугольнікаў ABM і CBM роўныя паміж сабой і не залежаць ад месцазнаходжання пункта M.

б) Дадзены трохвугольнік ABC. На яго старане AC адзначаны пункт M. Дакажыце, што адносіна радыусаў акружнасцей, апісаных каля трохвугольнікаў ABM і CBM, не залежыць ад месцазнаходжання пункта M.

192. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC, калі:

а) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$, $C(4;\ 0)$; б) $A(-2;\ 0)$, $B(6;\ 6)$, $C(6;\ -4)$.

193. Дакажыце, што радыус акружнасці, якая праходзіць праз артацэнтр непрамавугольнага трохвугольніка і дзве любыя яго вяршыні, роўны радыусу акружнасці, апісанай каля трохвугольніка.

194. Дадзены востравугольны трохвугольнік ABC, дзе $AB < BC$; BM — медыяна, BK — бісектрыса трохвугольніка. Дакажыце, выкарыстаўшы тэарэму сінусаў, што $AK < AM$.

195. Дакажыце, што радыус апісанай акружнасці трохвугольніка большы або роўны палавіне любой стараны трохвугольніка.

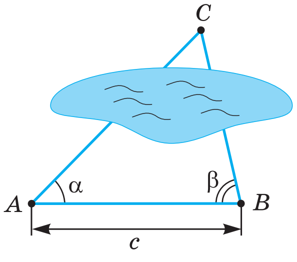
Мадэляванне

Заданне 1.

1) Складзіце алгарытм знаходжання пры дапамозе тэарэмы сінусаў адлегласці ад пункта A да недаступнага пункта C (рыс. 161), калі вядома, што $AB = c$, $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$.

2) Выразіце $AC = b$ праз c, α і β.

3) Знайдзіце AC пры ўмове, што $AB = 30$ м, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$. Адказ акругліце да 1 м.

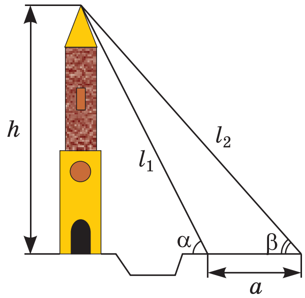


Рыс. 161

Заданне 2.

1) Гледзячы на рысунак 162, складзіце матэматычную мадэль знаходжання вышыні h вежы, даўжынь l_1 і l_2 тросаў, якія ідуць ад вяршыні вежы да зямлі. Адлегласць ад назіральніка да вежы вымераць рулеткай нельга, паколькі вежу акружае роў, але можна вымераць вуглы α і β і адлегласць a.

2) Знайдзіце вышыню вежы і даўжыні тросаў пры ўмове, што $a = 4$ м, $\alpha = 63°$, $\beta = 48°$. Адказ акругліце да 1 м.



Рыс. 162

Рыс. 163

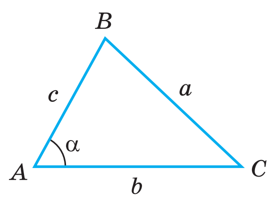
Цікава ведаць. Прыборы для вымярэння вуглоў на мясцовасці называюцца *вугламерамі*. Яны бываюць лазернымі і электроннымі. Інжынеры-будаўнікі карыстаюцца *тэадалітамі* (рыс. 163).

На рысунку 164 паказаны адзін з сімвалаў Беларусі — Камянецкая вежа, размешчаная ў Брэсцкай вобласці (г. Камянец). Гэта найбольш добра захаваная абарончая вежа, пабудаваная ў 1276—1288 гадах па загадзе князя Уладзіміра Васількавіча. Яе вышыня складае 29,4 м. З 1960 г. вежа з'яўляецца філіялам Брэсцкага абласнога краязнаўчага музея.

Рыс. 164

§ 13. Тэарэма косінусаў

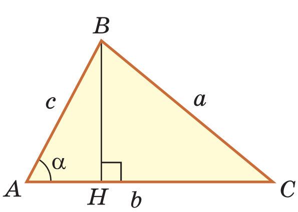
Тэарэма косінусаў дазваляе выразіць даўжыню любой стараны трохвугольніка праз даўжыні дзвюх іншых яго старон і косінус вугла паміж імі (напрыклад, даўжыню стараны a трохвугольніка ABC (рыс. 165) праз даўжыні старон b і c і $\cos\alpha$). Тэарэму косінусаў можна назваць самай «працуючай» у геаметрыі. Яна мае шматлікія вынікі, якія часта выкарыстоўваюцца пры рашэнні задач.



Рыс. 165

Тэарэма косінусаў. **Квадрат любой стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых яго старон мінус падвоены здабытак гэтых старон на косінус вугла паміж імі, г. зн.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



Рыс. 166

Доказ. Дакажам тэарэму для выпадку, калі ў трохвугольніку ABC вуглы A і C вострыя (рыс. 166). Правядзём вышыню BH да стараны AC.

З $\triangle ABH$ знаходзім $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, адкуль $HC = b - c\cos\alpha$.

З $\triangle BHC$ па тэарэме Піфагора

$a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 =$
$= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.

Па асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Тады $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.