ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму сінусаў.
2. Асноўныя задачы, якія дазваляе рашыць тэарэма сінусаў.
3. Тэарэму косінусаў.
4. Алгарытм знаходжання косінуса вугла трохвугольніка па трох старанах.
5. Формулу, якая звязвае стораны і дыяганалі паралелаграма.
6. Як па трох старанах трохвугольніка вызначыць яго від: вастравугольны, прамавугольны, тупавугольны.
7. Формулу медыяны трохвугольніка.

Умеем

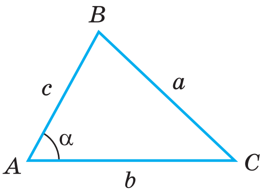
1. Даказваць тэарэму сінусаў.
2. Па дзвюх старанах і вугле, процілеглым адной з гэтых старон, знаходзіць вугал, процілеглы другой старане.
3. Па двух вуглах і старане, процілеглай аднаму з вуглоў, знаходзіць старану, процілеглую другому вуглу.
4. Па старане трохвугольніка і процілеглым ёй вугле знаходзіць радыус апісанай акружнасці.
5. Даказваць тэарэму косінусаў.
6. Знаходзіць косінус вугла трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.
7. Знаходзіць дыяганаль паралелаграма, ведаючы дзве яго суседнія стараны і другую дыяганаль.
8. Знаходзіць медыяну трохвугольніка, ведаючы тры яго стараны.

§ 14. Формула Герона. Рашэнне трохвугольнікаў

1. Формула Герона

Мы ведаем, як знайсці плошчу трохвугольніка па аснове і вышыні, праведзенай да гэтай асновы: $S = \frac{1}{2}ah$, а таксама па дзвюх старанах і вугле паміж імі: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Цяпер мы выведзем формулу знаходжання плошчы трохвугольніка па трох старанах.

Тэарэма (формула Герона).
Плошчу трохвугольніка са старанамі a, b і c можна знайсці па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, дзе $p = \frac{a+b+c}{2}$ — паўперыметр трохвугольніка.



Рыс. 183

Доказ. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рыс. 183). З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ вынікае, што $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Для $0° < \alpha < 180°$ сінус дадатны. Таму $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. З тэарэмы косінусаў $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, адкуль $\cos^2\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$. Тады

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{1}{2}bc \cdot \sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} =$$

$$= bc \cdot \frac{1}{bc} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2} \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{2}} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

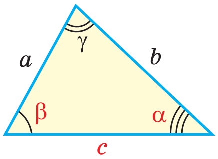
Паколькі $\frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a-2a}{2} = p-a$, $\frac{a-b+c}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = p-b$, $\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = p-c$, то $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Тэарэма даказана.

2. Рашэнне трохвугольнікаў

Рашэннем трохвугольніка называецца знаходжанне яго невядомых старон і вуглоў (часам іншых элементаў) па даных, якія вызначаюць трохвугольнік. Такая задача часта сустракаецца на практыцы, напрыклад у геадэзіі, астраноміі, будаўніцтве, навігацыі.

Разгледзім *алгарытмы* рашэння трох задач.

Задача *A* (рашэнне трохвугольніка па дзвюх старанах і вугле паміж імі).



Рыс. 184

Дадзена: a, b, γ (рыс. 184).

Знайсці: c, α, β.

Рашэнне.

1) Па тэарэме косінусаў $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

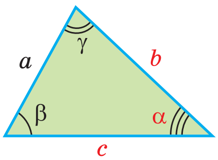
2) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

3) Вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

4) Вугал $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

Заўвага. Знаходжанне вугла α па тэарэме сінусаў $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},\ \sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{c}\right)$ патрабуе высвятлення таго, востры ці тупы вугал α.

Задача *B* (рашэнне трохвугольніка па старане і двух прылеглых да яе вуглах).



Рыс. 185

Дадзена: a, β, γ (рыс. 185).

Знайсці: α, b, c.

Рашэнне.

1) Вугал $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

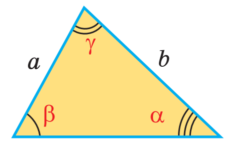
2) Па тэарэме сінусаў $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ ($\sin\alpha$ і $\sin\beta$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

3) Старану c можна знайсці пры дапамозе тэарэмы косінусаў або тэарэмы сінусаў: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ або $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ ($\cos\gamma$ і $\sin\gamma$ знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц).

Задача *C* (рашэнне трохвугольніка па трох старанах).

Дадзена: a, b, c (рыс. 186).

Знайсці: α, β, γ і радыус R апісанай акружнасці.



Рыс. 186

Рашэнне.

1) Па выніку з тэарэмы косінусаў $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2) Ведаючы $\cos\alpha$, вугал α знаходзім пры дапамозе калькулятара або табліц.

3) Аналагічна знаходзім вугал β.

4) Вугал $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

5) Радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка можна знайсці па формуле $R = \frac{abc}{4S}$, дзе $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Заўвага. Другім спосабам знаходжання R будзе пошук косінуса любога вугла пры дапамозе тэарэмы косінусаў $\left(\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$, затым знаходжанне па косінусе вугла яго сінуса $\left(\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\right)$ і, нарэшце, выкарыстанне тэарэмы сінусаў $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = 2R\right)$ для знаходжання R.

Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Знайсці плошчу S і радыус R апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі* 9, 12 *і* 15.

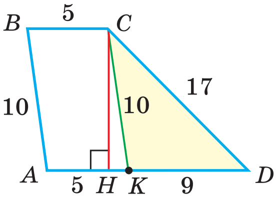
Рашэнне. *Спосаб* 1. Выкарыстаем формулу Герона. Абазначым $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Атрымаем: $p = \frac{9 + 12 + 15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тады $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радыус R апісанай акружнасці знойдзем з формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Маем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 15}{4 \cdot 54} = 7{,}5$.

Спосаб 2. Паколькі $9^2 + 12^2 = 15^2$, г. зн. $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то трохвугольнік — прамавугольны па адваротнай тэарэме Піфагора. Яго плошча роўна палавіне здабытку катэтаў: $S = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$, а радыус апісанай акружнасці роўны палавіне гіпатэнузы: $R = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

Адказ: $S = 54$, $R = 7{,}5$.

Задача 2. *Знайсці плошчу трапецыі з асновамі, роўнымі* 5 *і* 14, *і бакавымі старанамі, роўнымі* 10 *і* 17.



Рыс. 187

Рашэнне. Няхай у трапецыі $ABCD$ асновы $AD = 14$ і $BC = 5$, бакавыя стораны $AB = 10$ і $CD = 17$. Правядзём $CK \parallel AB$ (рыс. 187). Паколькі $ABCK$ — паралелаграм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, адкуль $KD = AD - AK = 9$. Знойдзем вышыню CH трохвугольніка KCD, якая роўна вышыні трапецыі. Плошчу трохвугольніка KCD знойдзем па формуле Герона, абазначыўшы яго стораны $a = 10$, $b = 17$, $c = 9$. Атрымаем:

$p = \frac{10 + 17 + 9}{2} = 18$, $p - a = 18 - 10 = 8$,

$p - b = 18 - 17 = 1$, $p - c = 18 - 9 = 9$,

$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36$. Паколькі $S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH$, то $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36$, $CH = 8$. Плошча трапецыі $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{14 + 5}{2} \cdot 8 = 76$.

Адказ: 76.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

222. Стораны трохвугольніка $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Знайдзіце:

а) паўперыметр трохвугольніка $p = \frac{a + b + c}{2}$;

б) значэнні выразаў $p - a$, $p - b$, $p - c$;

в) плошчу трохвугольніка па формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

223. Пры дапамозе формулы Герона знайдзіце плошчу трохвугольніка са старанамі:

а) 7 см, 15 см, 20 см;
б) 10 м, 10 м, 4 м.

224. а) Знайдзіце плошчу паралелаграма, адна старана якога роўна 15 см, а дыяганалі — 8 см і 26 см.

б) Знайдзіце плошчу паралелаграма, дзве стараны якога роўны 9 см і 10 см, а адна з дыяганалей — 17 см.

225. а) Знайдзіце найбольшую вышыню трохвугольніка са старанамі 20 см, 13 см, 11 см.

б) Знайдзіце найменшую вышыню трохвугольніка са старанамі 40 см, 37 см, 13 см.

226. а) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 5 см і 15 см, а бакавыя стораны — 9 см і 17 см.

б) Знайдзіце плошчу трапецыі, у якой асновы роўны 3 см і 12 см, а дыяганалі — 13 см і 14 см.

227. Знайдзіце плошчу трохвугольніка і радыус апісанай акружнасці трохвугольніка са старанамі 15 см, 13 см і 4 см.

228. Рашыце трохвугольнік, у якога вядомы:

а) $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 30°$;
б) $a = 1$, $b = 2$, $\gamma = 45°$;
в) $a = 8$, $\beta = 60°$, $\gamma = 50°$;
г) $b = 10$, $\beta = 100°$, $\gamma = 32°$;
д) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$;
е) $a = 50$, $b = 40$, $c = 20$.

229. Медыяны, праведзеныя да дзвюх старон трохвугольніка, роўны 12 см і 9 см, трэцяя старана трохвугольніка роўна 6 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

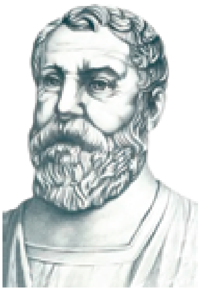
230. а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у трохвугольнік са старанамі, роўнымі 29 см, 25 см і 6 см.

б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка са старанамі, роўнымі 20 см, 15 см, 7 см.

231. Знайдзіце радыус акружнасці, якая датыкаецца да старон трохвугольніка, роўных 13 і 15, цэнтр якой ляжыць на трэцяй старане, роўнай 14.

232. Цэнтр O акружнасці, упісанай у трохвугольнік ABC, злучаны з яго вяршынямі адрэзкамі. Плошчы трохвугольнікаў, на якія разбіваецца трохвугольнік ABC, роўны 7 см^2, 15 см^2, 20 см^2. Знайдзіце стораны трохвугольніка.

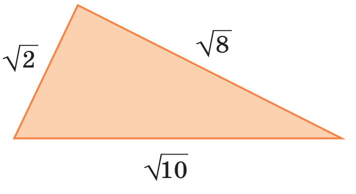
Цікава ведаць. Герон Александрыйскі — адзін з выдатных інжынераў антычнага свету. Многія яго вынаходніцтвы да гэтага часу выклікаюць захапленне. Вось толькі некаторыя з іх: адометр — механізм для знаходжання адлегласцей на мясцовасці, аўтамат па продажы вады, устройства для аўтаматычнага адкрывання дзвярэй і інш.



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, чым яшчэ знакаміты матэматык Герон. Якія трохвугольнікі называюцца *геронавымі трохвугольнікамі*? Устанавіце пры дапамозе Вікіпедыі, чаму гэтага вучонага звалі Геронам Александрыйскім і ці мог ён сустракацца з Піфагорам.

Гімнастыка розуму

Прыдумайце «прыгожы» (рацыянальны) спосаб знаходжання плошчы паказанага на рысунку 188 трохвугольніка.

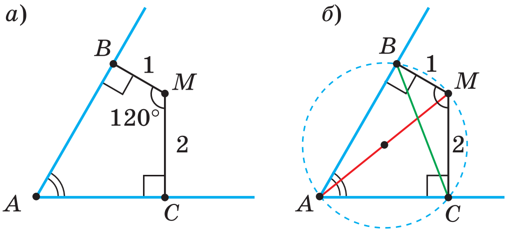


Рыс. 188

§ 15. Крэатыўная геаметрыя

1. Прыклады рашэння задач з выкарыстаннем тэарэмы сінусаў і тэарэмы косінусаў

Задача 1. *Унутры вугла* A, *роўнага* $60°$, *адзначаны пункт* M, *які знаходзіцца на адлегласці* 1 *ад адной стараны вугла і на адлегласці* 2 *ад другой стараны. Знайсці адлегласць ад пункта* M *да вяршыні вугла* A (*рыс.* 189, *а*).



Рыс. 189

Р а ш э н н е. Няхай $MB = 1$, $MC = 2$, $MB \perp AB$, $MC \perp AC$. Знойдзем даўжыню адрэзка AM. Сума вуглоў чатырохвугольніка $ABMC$ роўна $360°$. Таму $\angle BMC = 120°$.

Паколькі ў чатырохвугольніку $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180°$, то каля яго можна апісаць акружнасць па прымеце ўпісанага чатырохвугольніка (рыс. 189, *б*). Паколькі прамы ўпісаны вугал абапіраецца на дыяметр, то