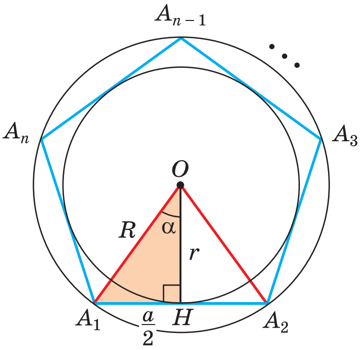
§ 17. Формулы радыусаў апісанай і ўпісанай акружнасцей правільнага многавугольніка



Рыс. 202

Няхай $A_1A_2A_3...A_n$ — правільны n-вугольнік са стараной a, дзе O — яго цэнтр, $OA_1 = R$ — радыус апісанай акружнасці, $OH = r$ — радыус упісанай акружнасці (рыс. 202).

Паколькі $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, а вышыня OH раўнабедранага трохвугольніка A_1OA_2 з'яўляецца бісектрысай і медыянай, то вугал $\alpha = \angle A_1OH = \frac{180^\circ}{n}$, $A_1H = \frac{a}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка A_1OH знаходзім:

а) $\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $a = 2R\sin\alpha = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, адкуль $a = 2r\operatorname{tg}\alpha = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

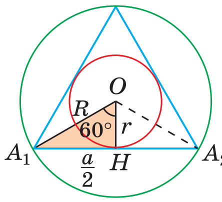
Заўвага. Выведзеныя формулы запамінаць не абавязкова. Важна памятаць спосаб іх атрымання: рашэнне прамавугольнага трохвугольніка A_1OH.

Прыклады. 1) Для правільнага трохвугольніка (рыс. 203) атрымаем:

$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, $\alpha = \angle A_1OH = 60^\circ$, $\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{3}$, або $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r\cdot\sqrt{3} = \frac{a}{2}$, $a = 2\sqrt{3}r$, або $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

2) Для правільнага чатырохвугольніка (рыс. 204) атрымаем:

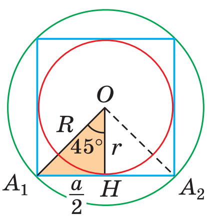
$\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, $\alpha = \angle A_1OH = 45^\circ$, $\sin 45^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{2}$, або $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg}45^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r\cdot 1 = \frac{a}{2}$, $a = 2r$, або $r = \frac{a}{2}$.



$\boxed{a = R\sqrt{3}}$

$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Рыс. 203

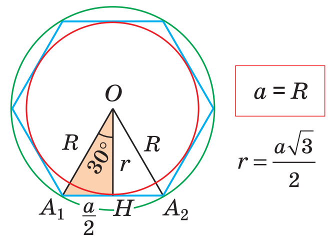


$\boxed{a = R\sqrt{2}}$

$r = \frac{a}{2}$

Рыс. 204

3) Для правільнага шасцівугольніка (рыс. 205) атрымаем $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, адкуль $R \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$, $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$, або $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Рыс. 205

Карысна запомніць формулы, якія выражаюць старану a_n правільнага n-вугольніка праз радыус R апісанай акружнасці пры $n = 3, 4, 6$:

$$a_3 = R\sqrt{3}, \qquad a_4 = R\sqrt{2}, \qquad a_6 = R.$$

Для знаходжання плошчы правільнага n-вугольніка $A_1A_2A_3...A_n$ з цэнтрам O і радыусам R апісанай акружнасці можна знайсці плошчу трохвугольніка A_1OA_2 па формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ і памножыць яе на колькасць такіх трохвугольнікаў, г. зн. на n.

Прыклад.

$$S_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{6}\right) = 3R^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$S_8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{8}\right) = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2;$$

$$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{12}\right) = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Для знаходжання радыуса r акружнасці, упісанай у правільны многавугольнік, можна карыстацца формулай плошчы апісанага многавугольніка $S = pr$.

Заданні да § 17

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

256. Дадзены правільны трохвугольнік. Выкарыстаўшы формулы $a = R\sqrt{3}$ і $r = \frac{1}{2}R$, запоўніце ў сшытку табліцу, дзе a — старана трохвугольніка, R — радыус апісанай акружнасці, r — радыус упісанай акружнасці.

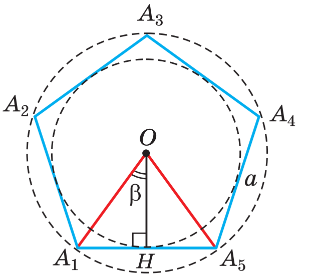
a	6		
R		$4\sqrt{3}$	
r			1

257. а) Знайдзіце радыус акружнасці, упісанай у правільны чатырохвугольнік са стараной, роўнай 8 см.
б) Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля правільнага чатырохвугольніка, перыметр якога роўны 32 см.

258. Дадзены правільны шасцівугольнік з перыметрам, роўным 30 см. Знайдзіце радыус апісанай і радыус упісанай акружнасцей гэтага шасцівугольніка.

259. а) Вылічыце радыус апісанай акружнасці правільнага 10-вугольніка са стараной, роўнай 6 см. Адказ акругліце да 0,1 см.
б) Вылічыце радыус упісанай акружнасці правільнага 12-вугольніка са стараной, роўнай 24 см. Адказ акругліце да 0,1 см.

260. Дадзены правільны пяцівугольнік $A_1A_2A_3A_4A_5$ з цэнтрам O і стараной $a = 20$ (рыс. 206). Знайдзіце вугал β і выразіце радыусы яго апісанай і ўпісанай акружнасцей праз a і β.



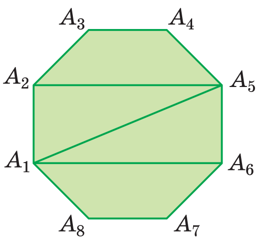
Рыс. 206

261. а) Выразіце старану a правільнага дзевяцівугольніка праз радыус R яго апісанай акружнасці.
б) Выразіце радыус r акружнасці, упісанай у правільны 18-вугольнік, праз яго старану a.

262. Знайдзіце плошчу правільнага 12-вугольніка, у якога радыус апісанай акружнасці роўны 6 см.

263. Дадзены правільны васьмівугольнік $A_1A_2A_3...A_8$ (рыс. 207).

а) Дакажыце, што $A_2A_5 \parallel A_3A_4$.
б) Дакажыце, што $A_1A_2A_5A_6$ — прамавугольнік.
в) Дакажыце, што дыяганаль A_1A_5 праходзіць праз цэнтр многавугольніка.
г) Знайдзіце вуглы трохвугольніка $A_1A_2A_5$.
д) Дакажыце, што плошча прамавугольніка $A_1A_2A_5A_6$ роўна $\frac{1}{2}$ плошчы дадзенага правільнага васьмівугольніка.

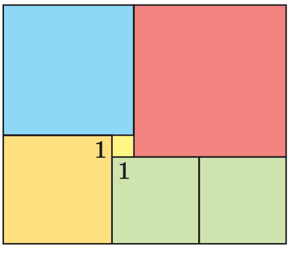


Рыс. 207

Гімнастыка розуму

Прамавугольнік на рысунку 208 складаецца з шасці квадратаў. Старана жоўтага квадрата роўна 1. Знайдзіце даўжыню стараны чырвонага квадрата.

(Для самакантролю. Адказ: даўжыня стараны чырвонага квадрата роўна колькасці перыядаў у табліцы Мендзялеева.)



Рыс. 208

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, якую тэарэму адносна правільных многавугольнікаў даказаў вялікі матэматык Карл Гаўс і якую геаметрычную фігуру ён загадаў намаляваць на сваім помніку.