§ 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

1. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла

Пусть в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, один из острых углов равен α, *противолежащий* этому углу катет равен a, *прилежащий* катет — b (рис. 6). Отношения катетов к гипотенузе $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$, а также отношения катета к катету $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ имеют специальные названия: *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* острого угла — и соответственно обозначаются: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

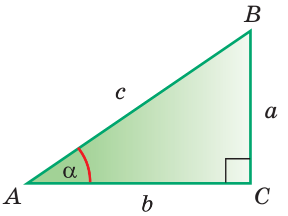


Рис. 6

Определение. **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего* катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Определение. **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего* катета к *прилежащему*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего* катета к *противолежащему*:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Пример. Угол K в $\triangle MNK$ равен $90°$ (рис. 7). Тогда:

$$\sin M = \frac{5}{13}, \qquad \cos M = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{5}{12}, \qquad \operatorname{ctg} M = \frac{12}{5}.$$

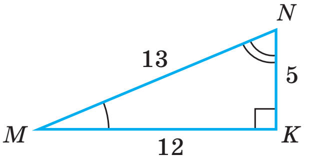


Рис. 7

Для угла N катет MK — противолежащий, а катет NK — прилежащий (см. рис. 7, с. 11). Поэтому согласно определениям получаем:

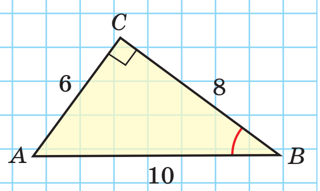
$$\sin N = \frac{MK}{MN} = \frac{12}{13}, \quad \cos N = \frac{NK}{MN} = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} N = \frac{MK}{NK} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg} N = \frac{NK}{MK} = \frac{5}{12}.$$

Можно заметить, что синус острого угла α прямоугольного треугольника и косинус другого острого угла этого треугольника, содержащего $90° - \alpha$, равны, т. е. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Так же $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Например, $\sin 60° = \cos 30°$, $\operatorname{tg} 40° = \operatorname{ctg} 50°$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

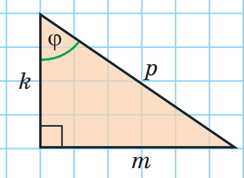
Тест 1

а) $\sin B = ...$
б) $\cos B = ...$
в) $\operatorname{tg} B = ...$
г) $\operatorname{ctg} B = ...$



Тест 2

а) $\sin \varphi = ...$
б) $\cos \varphi = ...$
в) $\operatorname{tg} \varphi = ...$
г) $\operatorname{ctg} \varphi = ...$



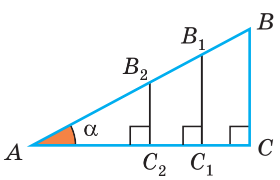


Рис. 8

Значение синуса острого угла, а также косинуса, тангенса и котангенса зависит только от величины угла и не зависит от размеров и расположения прямоугольного треугольника с указанным острым углом. Это следует из того, что прямоугольные треугольники с равным острым углом подобны, а у подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны. Так, в $\triangle ABC$ (рис. 8) $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2}$.

2. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60°

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 1$ (рис. 9). Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $AB = 2$. По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$ Тогда:

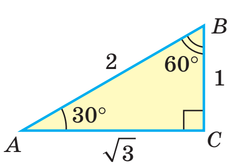


Рис. 9

$$\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{ctg} 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle B = 90° - \angle A = 60°$ (см. рис. 9), то

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle A = 45°$, $AC = BC = 1$ (рис. 10). По теореме Пифагора

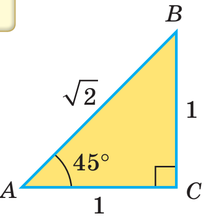


Рис. 10

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Тогда:

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = 1, \qquad \operatorname{ctg} 45° = \frac{AC}{BC} = 1.$$

Составим таблицу значений синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов для углов 30°, 45° и 60°.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Нахождение значений тригонометрических функций

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса данного угла можно приближенно находить при помощи специальных тригонометрических таблиц* либо калькулятора.

---

* Тригонометрические таблицы находятся на с. 54.

Например, с помощью калькулятора, компьютера или мобильного телефона (смартфона) находим: $\sin 45° = 0{,}707106...$. Приближенное значение тригонометрических функций при решении задач будем брать с округлением до четырех знаков после запятой: $\sin 45° = 0{,}7071$.

Итак, точное значение $\sin 45°$ равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а приближенное — 0,7071.

Таблицы и калькулятор также позволяют находить величину острого угла по значению синуса, косинуса или тангенса. Например, найдем острый угол, синус которого равен 0,4175. Выбрав на компьютере вид калькулятора «инженерный», далее «градусы», нужно ввести последовательно 0,4175 + $\boxed{\text{Inv}}$ + $\boxed{\sin^{-1}}$. На экране появится ответ: 24,676... . Округлим его до десятых долей градуса и получим 24,7°. Учитывая, что 1° содержит 60 угловых минут, получим: $0{,}7° = 0{,}7 \cdot 60' = 42'$. Искомый угол, синус которого 0,4175, приближенно равен 24°42′.

А теперь выполните **Тест 3**.

Тест 3

Какое равенство неверно:

а) $\sin 30° = \frac{1}{2}$; б) $\cos 60° = \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} 45° = 1$; г) $\sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

4*. Тригонометрические функции острого угла

Синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла, так как каждому острому углу x соответствует единственное значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Они называются *тригонометрическими функциями* и записываются так: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Поскольку в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, то для острого угла x справедливо: $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$, следовательно **синус и косинус острого угла положительны и меньше 1**. Тангенс и котангенс острого угла могут принимать *любое положительное значение*. Например, $\operatorname{tg} 85° \approx 11{,}4$.

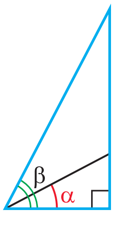
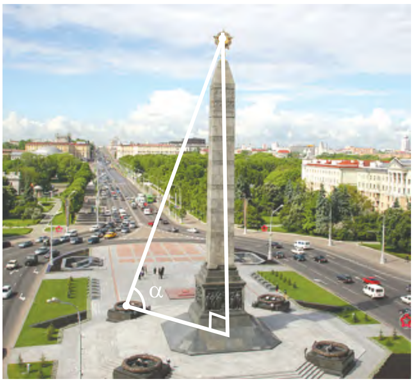


Рис. 11

С увеличением острого угла синус и тангенс возрастают, а косинус и котангенс убывают (рис. 11), то есть если $\beta > \alpha$, то $\sin\beta > \sin\alpha$, $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$, но $\cos\beta < \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}\alpha$ (см. с. 28, задачу 2*). Это гарантирует, что синус (косинус, тангенс и котангенс) острого угла определяют этот угол однозначно.

Моделирование

Орден на вершине монумента на площади Победы в г. Минске освещается прожектором, который находится на расстоянии 10 м от центра основания. Высота монумента 38 м. Определите величину угла, который луч прожектора составляет с поверхностью земли (с прямой, соединяющей прожектор и основание монумента).



Задания к § 1

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике ABC, где $\angle C = 90°$, катет BC равен 8 см, гипотенуза AB равна 17 см. Найти косинус угла A (рис. 12).*

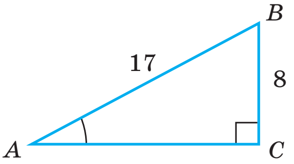


Рис. 12

Решение. По теореме Пифагора найдем катет AC: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см). Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Тогда $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$.

Ответ: $\frac{15}{17}$.

Задача 2. *Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 20 см, $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$ (рис. 13). Найти площадь треугольника.*

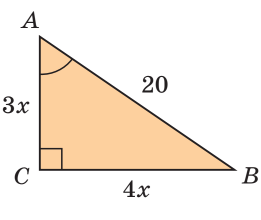


Рис. 13

Решение. Так как $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, то $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Обозначим $AC = 3x$ см, $BC = 4x$ см. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2$, $25x^2 = 400$, $x^2 = 16$, $x = 4$ $(x > 0)$. Тогда $AC = 3 \cdot 4 = 12$ (см), $BC = 4 \cdot 4 = 16$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (см^2).

Ответ: 96 см^2.

Задача 3*. *При помощи циркуля и линейки построить угол, синус которого равен* $\frac{4}{5}$.

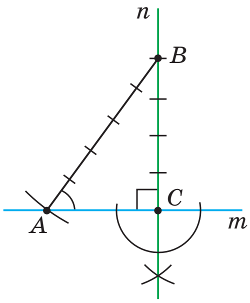


Рис. 14

Решение. Идея решения. Построим прямоугольный треугольник с катетом, равным 4 единицы, и гипотенузой, равной 5 единиц. Синус угла, противолежащего указанному катету, будет равен $\frac{4}{5}$.

Построение. 1) Строим прямой угол C (рис. 14), для чего проводим произвольную прямую m, отмечаем на ней точку C и строим прямую n, проходящую через точку C перпендикулярно прямой m (вспомните по рисунку алгоритм построения).

2) На прямой n от точки C откладываем последовательно четыре равных отрезка. Получаем отрезок BC, который содержит 4 единицы.

3) Строим окружность с центром в точке B радиусом, равным пяти единицам. В пересечении этой окружности и прямой m получаем точку A. Угол BAC — искомый.

Доказательство. Из $\triangle ABC$ находим $\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО*

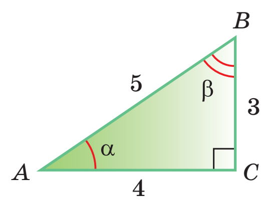


Рис. 15

1. По рисунку 15 найдите:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$;
д) $\sin\beta$; е) $\cos\beta$; ж) $\operatorname{tg}\beta$; з) $\operatorname{ctg}\beta$.

2. Используя клеточки в тетради, изобразите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, такой, что $\operatorname{tg} A = \frac{4}{5}$. Определите на глаз величину угла A. Проверьте свое предположение при помощи транспортира.

3. По рисункам 16, *а*)—*в*) вычислите соответственно $\sin\alpha$, $\cos\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

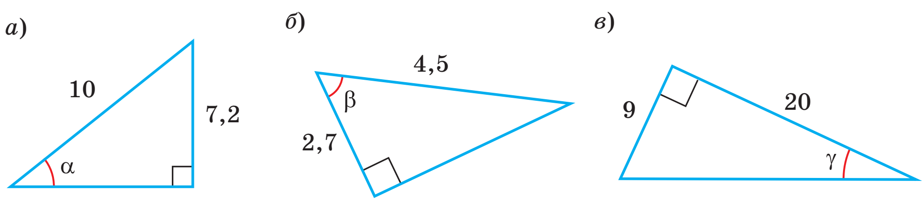


Рис. 16

* К каждому параграфу имеется резерв задач, помещенный в пособие «Наглядная геометрия. 9 класс» В. В. Казакова.

4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 25 см, катет AC равен 24 см. Найдите:

а) $\sin A$; б) $\cos A$; в) $\operatorname{tg} B$;
г) $\operatorname{ctg} B$; д) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} B$; е) $\sin^2 A + \cos^2 A$.

5. При помощи калькулятора или таблиц найдите, округлив ответ до 0,0001:

а) $\sin 5°$; б) $\sin 15°$; в) $\cos 40°$;
г) $\cos 72°$; д) $\operatorname{tg} 50°$; е) $\operatorname{tg} 85°$.

6. При помощи калькулятора или таблиц найдите, округлив ответ до 1°, величину острого угла x, если:

а) $\sin x = 0{,}4226$; б) $\cos x = 0{,}6820$; в) $\operatorname{tg} x = 0{,}5774$.

7. Найдите острые углы α и β треугольников на рисунках 17, *а*)—*в*), используя тригонометрические функции и калькулятор (таблицы). Ответы округлите до 1°.

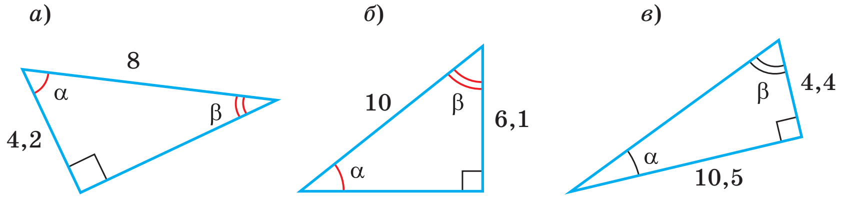


Рис. 17

8. Дан равнобедренный треугольник ABC (рис. 18), $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, BH — высота. Вычислите:

а) синус угла A;
б) косинус угла C;
в) тангенс угла CBH;
г) высоту AK и синус угла ABC.

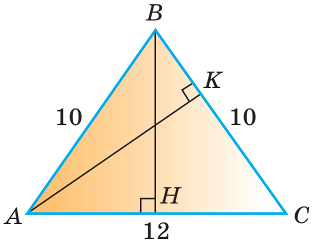


Рис. 18

9. Найдите синус меньшего острого угла между диагональю прямоугольника и его стороной, если периметр прямоугольника равен 34 см, а одна из сторон — 12 см.

10. Заполните пропуски в равенствах, перенеся их в тетрадь:

а) $\sin 60° = \ldots$; б) $\operatorname{tg} 30° = \ldots$;

в) $\sin \ldots = \frac{1}{2}$; г) $\cos \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin 45° = \ldots$; е) $\operatorname{ctg} \ldots = \sqrt{3}$;

ж) $\ldots 45° = 1$; з) $\cos \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Угол α — острый. Найдите:

а) угол α, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

б) угол α, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) угол α, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$;

г) угол α, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}5$.

12. Найдите косинус острого угла равнобедренной трапеции со сторонами, равными 5 см, 11 см, 6 см, 6 см, и укажите градусную меру этого угла.

13. По данным на рисунках 19, *а*)—*в*) найдите длину отрезка x, используя определение синуса или косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

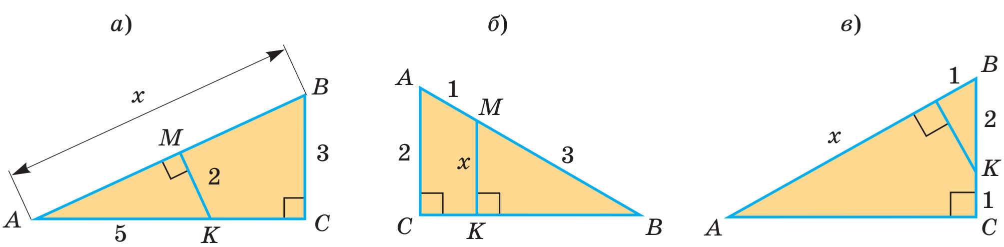


Рис. 19

14. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, тангенс угла при основании равен 2. Найдите площадь треугольника.

15. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{5}$, один из катетов на 6 см больше другого. Найдите площадь треугольника.

16. Окружность с центром O касается катета AC и проходит через вершину B прямоугольного треугольника ABC с катетами $BC = 6$, $AC = 8$; точка O лежит на гипотенузе AB (рис. 20). Найдите радиус этой окружности, используя определение синуса острого угла.

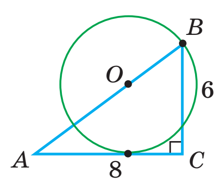


Рис. 20

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

17*. Какие из следующих чисел не могут быть значениями синуса острого угла: 2; $\frac{15}{17}$; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; 0,75; $\sqrt{3}-1$?

18*. При помощи циркуля и линейки постройте угол α, если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$;   б) $\cos\alpha = 0{,}6$.

19*. Докажите, что если α и β — острые углы одного прямоугольного треугольника, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta < 2$; б) $\sin\alpha + \sin\beta > 1$.

20*. а) Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, косинус угла при основании равен 0,6. Найдите площадь треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, синус противолежащего основанию острого угла равен $\frac{3}{5}$. Найдите площадь треугольника.

21*. В остроугольном треугольнике ABC (рис. 21) проведены высоты AA_1 и CC_1, $\angle B = 60°$, $A_1C_1 = 4$, $S_{A_1BC_1} = 9$.

а) Докажите, что треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия, равным $\cos B$.

б) Найдите длину стороны AC.

в) Найдите S_{ABC}.

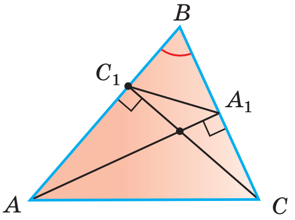


Рис. 21

Реальная геометрия

На рисунке 22 изображен дорожный знак «Крутой подъем 12 %». Он означает, что через каждые 100 м, отсчитываемых по горизонтали, высота положения точки увеличивается на 12 м.

Задание 1. Определите величину угла подъема при таком знаке, используя понятие тангенса угла.

Задание 2. Вычислите, используя тригонометрические функции, на какую высоту относительно первоначального положения поднимется автомобиль, если он проедет по дороге 240 м в гору. Проверьте полученный результат, решив эту же задачу, используя подобие треугольников.

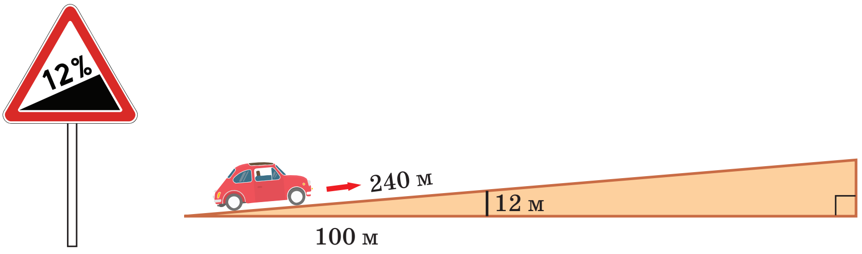


Рис. 22