§ 2. Решение прямоугольного треугольника

1. Алгоритм решения прямоугольного треугольника

Под *решением прямоугольного треугольника* понимают нахождение его неизвестных сторон и углов по некоторым элементам, определяющим этот треугольник. Рассмотрим три задачи:

1) нахождение катета по гипотенузе и острому углу;
2) нахождение катета по другому катету и острому углу;
3) нахождение гипотенузы по катету и острому углу.

Задача 1. *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна* 6, *острый угол равен* 32° (рис. 23). *Найти катет, прилежащий к данному углу. Ответ округлить до* 0,1.

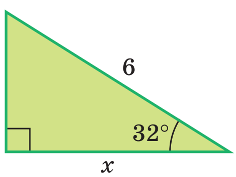


Рис. 23

Решение. Примем длину искомого катета за x.

$$\left(\text{Известно: } \cos\alpha = \frac{\textit{прилежащий катет}}{\textit{гипотенуза}}.\right)$$

$\cos 32° = \dfrac{x}{6}$, (шаг 1) $\quad x = 6 \cdot \cos 32°$, (шаг 2) $\quad x \approx 6 \cdot 0{,}8480 \approx 5{,}1$. (шаг 3)

Ответ: 5,1.

Задача 2. *Катет прямоугольного треугольника равен* 2,5, *а прилежащий к нему угол равен* 68° (рис. 24). *Найти другой катет. Ответ округлить до* 0,1.

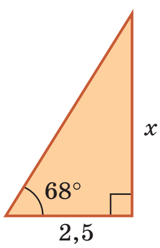


Рис. 24

Решение. Примем длину неизвестного катета за x.

$$\left(\text{Известно: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{прилежащий катет}}.\right)$$

$\operatorname{tg} 68° = \dfrac{x}{2{,}5}$, (шаг 1) $\quad x = 2{,}5 \cdot \operatorname{tg} 68°$, (шаг 2) $\quad x \approx 2{,}5 \cdot 2{,}4751 \approx 6{,}2$. (шаг 3)

Ответ: 6,2.

Задача 3. *Катет прямоугольного треугольника равен* 4,2, *противолежащий ему угол равен* 29° (рис. 25). *Найти гипотенузу треугольника. Ответ округлить до* 0,1.

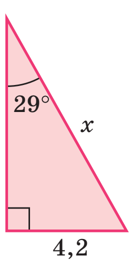


Рис. 25

Решение. Примем длину гипотенузы за x.

$$\left(\text{Известно: } \sin\alpha = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{гипотенуза}}.\right)$$

$\sin 29° = \dfrac{4{,}2}{x}$, $\quad x \cdot \sin 29° = 4{,}2$,

$$x = \frac{4{,}2}{\sin 29°} \approx \frac{4{,}2}{0{,}4848} \approx 8{,}7.$$

Ответ: 8,7.

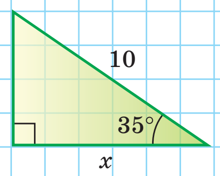
А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Катет x равен:

а) $10 \sin 35°$; б) $\dfrac{10}{\cos 35°}$;

в) $10 \cos 35°$; г) $10 \operatorname{ctg} 35°$.



2*. Правила решения прямоугольного треугольника

Преобразуем формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса и запишем результаты для треугольника на рисунке 26:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin\alpha$, $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$;

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, $b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $a = \dfrac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

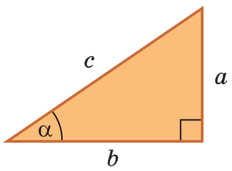


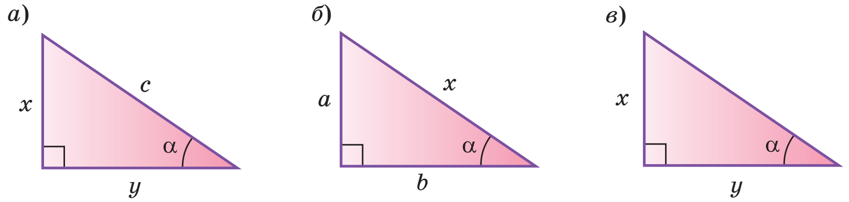
Рис. 26

Удобно пользоваться следующими правилами:

Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла (рис. 27, *а*).

Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла (рис. 27, *б*).

Катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к первому катету угла (рис. 27, *в*).



а) $x = c\sin\alpha$, $y = c\cos\alpha$

б) $x = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $x = \dfrac{b}{\cos\alpha}$

в) $x = y\operatorname{tg}\alpha$, $y = x\operatorname{ctg}\alpha$

Рис. 27

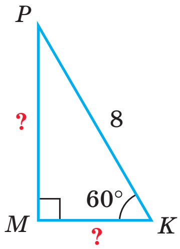


Рис. 28

Пример.

В $\triangle MPK$ известно: $\angle M = 90°$, $\angle K = 60°$, $PK = 8$ (рис. 28).

$$MP = PK \cdot \sin K = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$MK = PK \cdot \cos K = 8 \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Полезно запомнить!

Если в прямоугольном треугольнике с углом 30° (или 60°) дан *меньший катет* a, то *больший катет* $b = a\sqrt{3}$ (рис. 29, *а*). А если дан *больший катет* b, то *меньший катет* $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$ (рис. 29, *б*).

Если в прямоугольном треугольнике с углом 45° дан *катет* a, то *гипотенуза* $c = a\sqrt{2}$ (рис. 30, *а*), а если дана *гипотенуза* c, то *катет* $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (рис. 30, *б*).

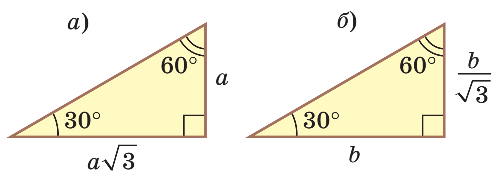


Рис. 29

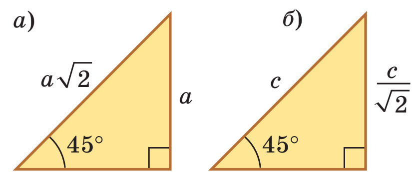


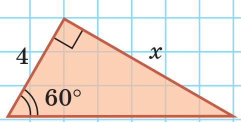
Рис. 30

А теперь выполните **Тест 2**.

Тест 2

Длина стороны x равна:

а) 8; б) $4\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) 6.



Задания к § 2

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике ABC известно:* $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $\angle A = \alpha$, *CH — высота, проведенная к гипотенузе* (рис. 31). *Найти проекцию HB катета BC на гипотенузу.*

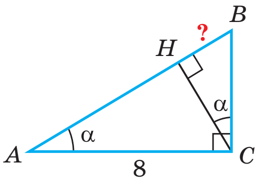


Рис. 31

Решение. Заметим, что $\angle BCH = \angle A = \alpha$, так как эти углы дополняют $\angle B$ до $90°$. Из $\triangle ABC$ $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$, $BC = AC\operatorname{tg}\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha$. Из $\triangle BHC$ $\frac{HB}{BC} = \sin\alpha$, $HB = BC\sin\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

Ответ: $8\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

Задача 2*. *В равнобедренной трапеции ABCD меньшее основание BC равно* 7, *боковая сторона AB равна* 10, $\sin A = 0{,}8$. *Найти площадь трапеции.*

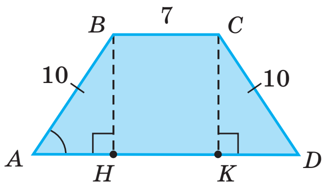


Рис. 32

Решение. Площадь трапеции находится по формуле $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}\cdot h$. Найдем большее основание и высоту трапеции. Проведем в трапеции высоты BH и CK (рис. 32). Так как $HBCK$ — прямоугольник (все углы прямые), то $HK = BC = 7$. Из равенства прямоугольных треугольников AHB и DKC (по катету и гипотенузе) $AH = KD$. Из прямоугольного треугольника AHB находим: $BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot 0{,}8 = 8$, откуда $AH = 6$ (пифагорова тройка 6, 8, 10). Тогда $AD = 2AH + HK = 2 \cdot 6 + 7 = 19$, $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}\cdot BH = \frac{7+19}{2}\cdot 8 = 104$.

Ответ: 104.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

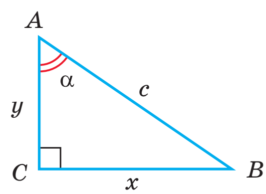


Рис. 33

22. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 33) $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Найдите:

а) угол B; б) катет BC; в) катет AC.

23. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, $AC = 4$, $\angle B = \beta$. Найдите:

а) катет BC; б) гипотенузу AB; в) S_{ABC}.

24. Найдите сторону прямоугольного треугольника, которая обозначена буквой x на рисунках 34, *а*)—*в*). Ответы округлите до 0,1. При расчетах используйте калькулятор или таблицы.

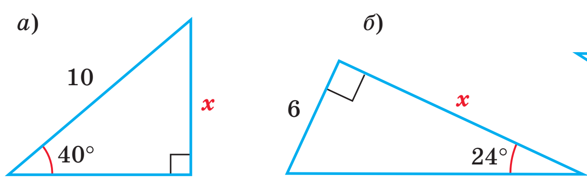


Рис. 34

25. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:

а) $AB = 10,\ \sin B = \frac{3}{5}$; б) $AB = 8,\ \cos B = 0{,}75$;

в) $BC = 4,\ \sin A = \frac{2}{3}$; г) $AC = 1{,}5,\ \mathrm{tg}\, A = 2$.

26. По данным на рисунках 35, *а)*—*г)* найдите сторону x и площадь S:

а) прямоугольника;
б) равнобедренного прямоугольного треугольника;
в) квадрата;
г) равностороннего треугольника.

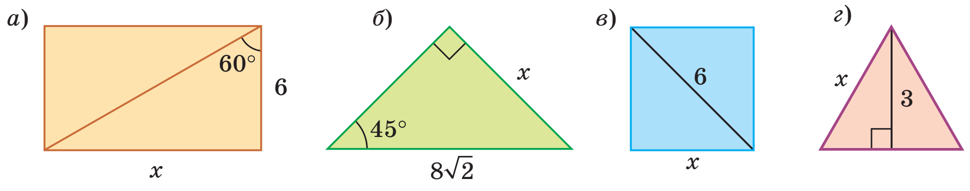


Рис. 35

27. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, синус острого угла при вершине равен 0,8. Вычислите площадь треугольника.

28. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $BC = 4$ см и $AD = 10$ см. Известно, что $\mathrm{tg}\, A = \frac{2}{3}$. Найдите площадь трапеции.

29. Дан параллелограмм $ABCD$. Его высота BK проведена к стороне AD, $AK : KD = 1 : 2$, $BC = 24$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $\cos C = \frac{4}{5}$.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

30*. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, высота CH равна 12, медиана CM равна 15. Найдите синус меньшего острого угла треугольника ABC.

31*. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна a, угол при основании равен α (рис. 36). Найдите площадь треугольника ABC.
б) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) и углом α при большем основании (рис. 37). Найдите площадь трапеции.

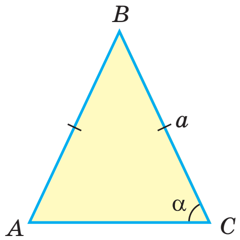


Рис. 36

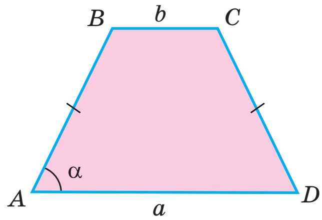


Рис. 37

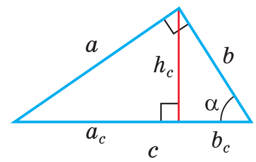


Рис. 38

32*. В треугольнике ABC высота BH и медиана BM делят $\angle ABC$ на три равных угла. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

33*. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза c и острый угол α (рис. 38). Найдите: катет a, катет b, высоту h_c, проекции a_c и b_c катетов a и b на гипотенузу.

Моделирование

Определите, можно ли разместить под лестницей длиной 6 м, составляющей с полом угол в 50° (рис. 39), ящик с размерами $2 \times 2 \times 3$ (м). Рассмотрите разные варианты расположения ящика (ящик можно класть набок).

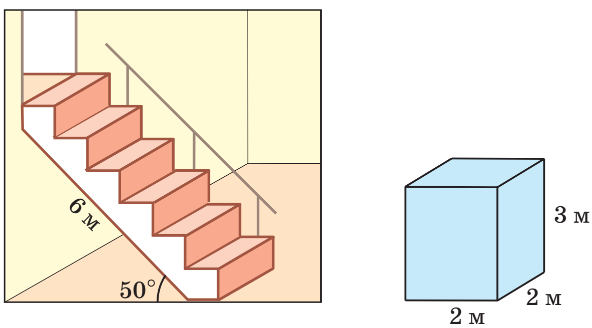


Рис. 39

Гимнастика ума

По рисунку 40 найдите:

а) $\operatorname{tg} C$;
б) $\sin A$;
в) $\operatorname{ctg} B$.

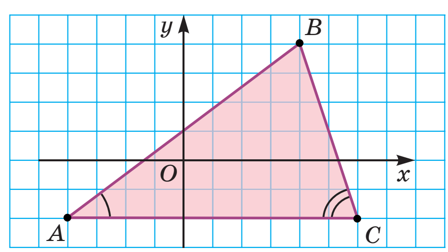


Рис. 40

При помощи **Интернета** выясните, что означает термин «*тригонометрия*», когда он возник. В каких сферах деятельности используется тригонометрия.