§ 3. Тригонометрические формулы

Используя формулы $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника, можно получить формулы, связывающие значения тригонометрических функций острого угла.

1. Основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$

Доказательство. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.

Тогда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$

Следствие.

Так как синус и косинус острого угла α положительны, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \textit{и} \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

2. Выражение тангенса и котангенса через синус и косинус

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.}$$

Доказательство. а) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Следствие. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Проверим справедливость основного тригонометрического тождества. Верно ли, например, что $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$? Да, это верно, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

3. Основная задача

Дано: $\sin\beta = \frac{5}{13}$, β — острый угол.

Найти: $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

Решение. *Способ* 1. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\beta = 1$, $\cos^2\beta = 1 - \frac{25}{169}$, $\cos^2\beta = \frac{144}{169}$, $\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$. Так как косинус *острого угла* больше нуля, то $\cos\beta = \frac{12}{13}$; откуда $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{12}{5}$.

Способ 2. Изобразим прямоугольный треугольник с катетом 5 и гипотенузой 13 (рис. 41). Синус угла, противолежащего данному катету, равен $\frac{5}{13}$. Поэтому этот угол равен β. По теореме Пифагора другой катет равен $\sqrt{13^2-5^2}=12$. Тогда $\cos\beta=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{12}{5}$.

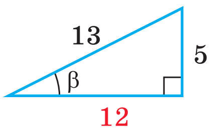

Рис. 41

Способ 3. Пусть катет, противолежащий углу β, равен $5x$, тогда гипотенуза равна $13x$. По теореме Пифагора прилежащий катет равен $\sqrt{(13x)^2-(5x)^2}=\sqrt{144x^2}=12x$. Отсюда $\cos\beta=\frac{12x}{13x}=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$ $=\frac{5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{12}{5}$.

Ответ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Если $\cos\alpha=0{,}8$ и угол α — острый, то $\sin\alpha$ равен:

а) 0,8; б) 0,6; в) 0,2; г) 1,6.

Задания к § 3

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *В параллелограмме ABCD* (рис. 42) *сторона* $BC = 50$ *см, высота* $BK = 30$ *см,* $\cos A=\frac{8}{17}$. *Найти периметр параллелограмма.*

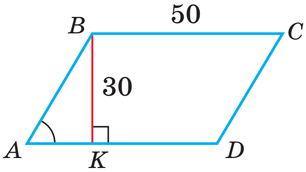

Рис. 42

Решение. Из треугольника ABK находим: $\sin A=\frac{BK}{AB}$, $AB=\frac{BK}{\sin A}$. Из основного тригонометрического тождества следует: $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,

$\sin^2 A+\left(\frac{8}{17}\right)^2=1$, $\sin^2 A=1-\frac{64}{289}=\frac{225}{289}$, $\sin A=\frac{15}{17}$

(так как угол A — острый, то $\sin A>0$). Тогда

$AB=\frac{BK}{\sin A}=\frac{30}{\frac{15}{17}}=34$ (см), $P_{ABCD}=2(AB+BC)=2\cdot(34+50)=168$ (см).

Ответ: 168 см.

Задача 2*. *Доказать, что при увеличении угла от* $0°$ *до* $90°$:

а) *синус угла увеличивается от* 0 *до* 1, *а косинус — уменьшается от* 1 *до* 0;

б) *тангенс угла увеличивается от* 0 *до бесконечности.*

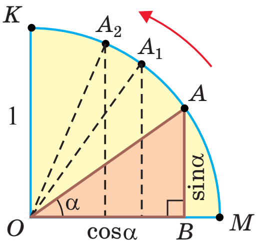

Рис. 43

Решение. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники с гипотенузой, равной 1. Для этого опишем радиусом OM, равным 1, четверть окружности — дугу MK (рис. 43). Пусть $\angle AOM = \alpha$. Опустим из точки A перпендикуляр AB на OM. Тогда $\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$, $\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. При повороте радиуса OM вокруг центра O против часовой стрелки, начиная от OM и заканчивая OK, угол α будет увеличиваться от $0°$ до $90°$ (образуя указанные на чертеже углы: $\angle MOA$, $\angle MOA_1$, $\angle MOA_2$ и т. д.). Величина катета AB, противолежащего углу α, будет увеличиваться от 0 до 1. А величина катета OB, наоборот, будет уменьшаться от 1 до 0. Таким образом, **при увеличении угла от $0°$ до $90°$ его синус увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.**

Из формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ также следует (учитывая положительность синуса и косинуса острого угла), что с увеличением синуса от 0 до 1 косинус уменьшается от 1 до 0.

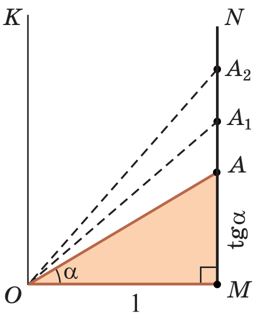

Рис. 44

б) Для определения изменения тангенса угла удобно рассматривать треугольники, у которых прилежащий катет не изменяется и остается равным 1, а противолежащий катет изменяется. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOM, у которого отрезок $OM = 1$, $\angle AOM = \alpha$ (рис. 44). По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$. Угол α станем изменять, перемещая точку A по прямой MN, начиная от точки M и проходя через точки A, A_1, A_2 и т. д. При этом угол α и его тангенс начнут возрастать. Таким образом, когда угол α при движении точки A вверх будет стремиться к углу KOM, равному $90°$, то тангенс этого угла будет неограниченно возрастать.

К такому же выводу можно прийти, рассматривая формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. При увеличении угла α от $0°$ до $90°$ числитель дроби будет увеличиваться от 0 до 1, а знаменатель — уменьшаться от 1 до 0, значит, вся дробь будет увеличиваться от 0 до бесконечности. Таким образом, **при увеличении угла от $0°$ до $90°$ его тангенс увеличивается от 0 до бесконечности.**

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

34. Дан острый угол α.

а) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

б) Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

в) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

г) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

35. а) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если α — острый угол и $\sin\alpha = 0{,}8$.

б) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если α — острый угол и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

36. Заполните пропуски в формулах, переписав их в тетрадь:

а) $\sin^2\beta + \ldots = 1$; б) $\cos^2\alpha = 1 - \ldots$;

в) $\ldots = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\ldots}{\ldots}$.

37. Найдите:

а) синус, тангенс и котангенс острого угла, косинус которого равен $0{,}6$;

б) косинус, тангенс и котангенс острого угла, синус которого равен $\frac{7}{25}$.

38. В окружности с радиусом, равным 6 см, проведены диаметр AB и хорда AC. Найдите длину хорды BC, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

39*. Сравните величины острых углов α или β, если:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$.

40*. Выясните, что больше: $\sin\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$, где α — острый угол.

41*. Докажите, что для острого угла α справедливо тождество $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

42*. Выведите для острого угла α формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ и $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, разделив почленно обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$ и на $\cos^2\alpha$.

43*. Найдите синус острого угла α, если его котангенс равен $1\frac{1}{3}$.

Реальная геометрия

На рисунке 45 показаны размеры железнодорожной насыпи, поперечное сечение которой имеет форму равнобедренной трапеции. Найдите по указанным размерам примерную высоту h насыпи. Ответ округлите до 0,1 м.

Рис. 45

Геометрия 3D

Задача. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат, диагональ которого $AC = 4\sqrt{6}$ см. Диагональ CD_1 боковой грани составляет с ребром основания DC угол $60°$ (рис. 46). Найдите объем параллелепипеда.

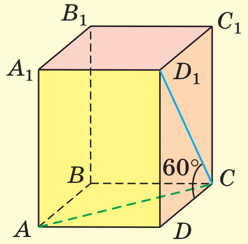

Рис. 46

Р е ш е н и е. Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле $V = abc$, где a, b и c — его измерения. Так как $ABCD$ — квадрат, то $AD = DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). Из прямоугольного треугольника D_1DC находим $D_1D = DC \operatorname{tg} 60° = DC\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см). Искомый объем $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 576$ (см^3).

О т в е т: 576 см^3.

Задание. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 47). Периметр ее основания равен 12 см, диагональ CB_1 боковой грани составляет с боковым ребром BB_1 угол, котангенс которого равен 1,5. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

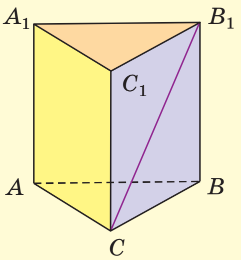

Рис. 47

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°.
3. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного угла.

Умеем

1. Решать прямоугольный треугольник.
2. Зная $\sin\alpha$, где α — острый угол, находить $\cos\alpha$ и обратно.
3. Зная $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$, где α — острый угол, находить $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
4. Доказывать основное тригонометрическое тождество.

§ 4. Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла

1. Определение значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для любого угла α от 0° до 180°

Ранее мы дали определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла через отношение сторон прямоугольного треугольника. Сделаем теперь это для углов от 0° до 180°.

Рассмотрим полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 48). От положительной полуоси Ox против часовой стрелки отложим острый угол α, сторона которого пересекает полуокружность в точке $M(x;\ y)$. Из прямоугольного треугольника OMN, где $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, получаем: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, то есть синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла α выражаются через координаты x и y точки $M(x;\ y)$. Точно так же определяются значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для любого угла α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Таким образом, синусом угла α называется ордината y, косинусом — абсцисса x, тангенсом — отношение ординаты к абсциссе $\frac{y}{x}$, а котангенсом — отношение абсциссы к ординате $\frac{x}{y}$ точки M единичной полуокружности.

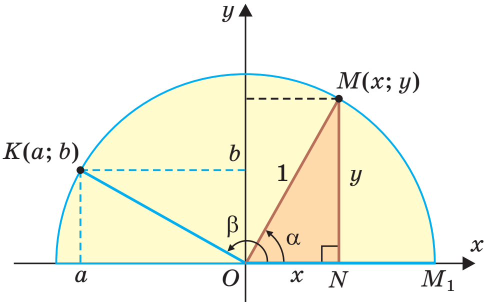

Рис. 48