ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°.
3. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного угла.

Умеем

1. Решать прямоугольный треугольник.
2. Зная $\sin\alpha$, где α — острый угол, находить $\cos\alpha$ и обратно.
3. Зная $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$, где α — острый угол, находить $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
4. Доказывать основное тригонометрическое тождество.

§ 4. Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла

1. Определение значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для любого угла α от 0° до 180°

Ранее мы дали определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла через отношение сторон прямоугольного треугольника. Сделаем теперь это для углов от 0° до 180°.

Рассмотрим полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 48). От положительной полуоси Ox против часовой стрелки отложим острый угол α, сторона которого пересекает полуокружность в точке $M(x;\ y)$. Из прямоугольного треугольника OMN, где $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, получаем: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, то есть синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла α выражаются через координаты x и y точки $M(x;\ y)$. Точно так же определяются значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для любого угла α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Таким образом, синусом угла α называется ордината y, косинусом — абсцисса x, тангенсом — отношение ординаты к абсциссе $\frac{y}{x}$, а котангенсом — отношение абсциссы к ординате $\frac{x}{y}$ точки M единичной полуокружности.

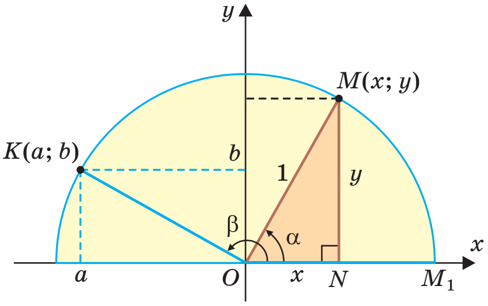


Рис. 48

Например, для тупого $\angle KOM_1 = \beta$ (рис. 48), где $K(a;\ b)$, получим:

$$\sin\beta = b,\ \cos\beta = a,\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Для любого положения точки $M(x;\ y)$ на единичной полуокружности верно равенство $x^2 + y^2 = 1$ (докажите самостоятельно). Поэтому для углов α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, верно основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Также верны тождества: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса тупых углов

Пусть $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, откуда $\angle A_1OB = 180° - \alpha$ (рис. 49). Так как $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$ по гипотенузе и острому углу, то $A_1B_1 = AB$, $OB_1 = OB$. Точки A и A_1 имеют координаты: $A(a;\ b)$ и $A_1(-a;\ b)$. Тогда $\sin\alpha = b$, $\cos\alpha = a$, $\sin(180° - \alpha) = b$, $\cos(180° - \alpha) = -a$, то есть для углов от $0°$ до $180°$ справедливы равенства:

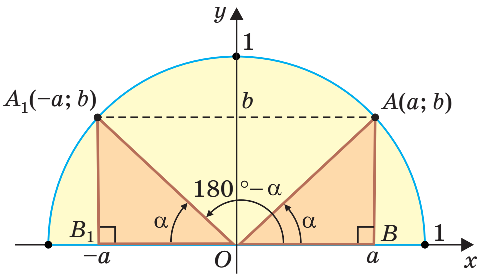


Рис. 49

$$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,}$$

$$\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.}$$

Можно пользоваться следующим правилом:

Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла.
Косинус тупого угла равен косинусу смежного с ним острого угла, взятому со знаком «минус».

Пример 1. $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Разделив почленно равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, а затем наоборот, получим равенства:

$$\boxed{\operatorname{tg}\ (180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\ \alpha,}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\ (180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\ \alpha.}$$

Можно пользоваться следующим правилом:

Тангенс (котангенс) тупого угла равен тангенсу (котангенсу) смежного с ним острого угла, взятому со знаком «минус».

Пример 2. $\mathrm{tg}\,120° = -\mathrm{tg}\,60° = -\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,135° = -\mathrm{ctg}\,45° = -1$.

Указанные формулы и правила позволяют находить значения тригонометрических функций тупого угла через значения тригонометрических функций острого угла, который дополняет данный тупой угол до 180°: синусы углов, дополняющих друг друга до 180°, равны между собой, а косинусы, тангенсы и котангенсы — противоположны. Так как синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла положительные, то синус тупого угла положительный, а косинус, тангенс и котангенс — отрицательные.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

Вычислите: $\cos 120° + \sin 150°$.

3*. Значения тригонометрических функций для углов 0°, 90°, 180°

Если луч OM совпадет с лучом OM_1 (рис. 50), то будем считать, что $\alpha = 0°$. Тогда:

а) $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\mathrm{tg}\,0° = \frac{0}{1} = 0$; значение $\mathrm{ctg}\,0° = \frac{1}{0}$ не определено, так как деление на нуль невозможно;

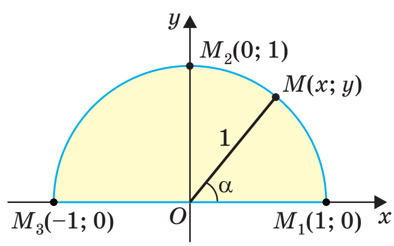


Рис. 50

б) $\angle M_2OM_1 = 90°$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\mathrm{ctg}\,90° = \frac{0}{1} = 0$; значение $\mathrm{tg}\,90° = \frac{1}{0}$ не определено, так как деление на нуль невозможно;

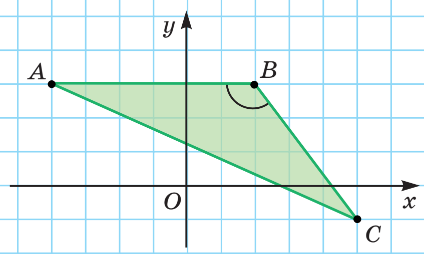
в) $\angle M_3OM_1 = 180°$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\mathrm{tg}\,180° = \frac{0}{-1} = 0$; значение $\mathrm{ctg}\,180° = \frac{-1}{0}$ не определено, так как деление на нуль невозможно.

Поскольку проекции радиуса, равного 1, на оси координат меньше либо равны 1, то для углов $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ справедливы неравенства: $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

А теперь выполните **Тест 2**.

Тест 2

По рисунку найдите косинус угла B.



Гимнастика ума

Если максимально расставить пальцы руки, то углы между мизинцем и остальными пальцами будут составлять примерно 30°, 45°, 60°, 90° (рис. 51).

Интересно, что если пальцы пронумеровать цифрами от 0 до 4, как на рисунке, то для нахождения синуса углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90° можно использовать формулу $\sin\alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$, где α — данный угол, а n — номер пальца. Проверьте самостоятельно работу этой формулы.

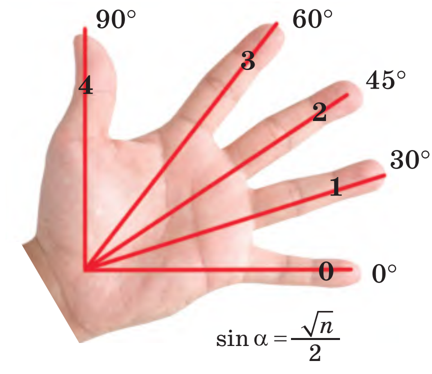


Рис. 51

Задания к § 4

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Найти* $\cos\alpha$ *и* $\operatorname{tg}\alpha$, *если* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ *и* α — *тупой угол.*

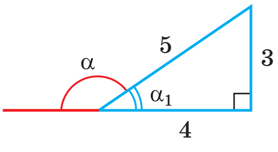


Рис. 52

Решение. *Способ* 1. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Поскольку угол α — тупой, то его косинус отрицательный. Поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.

Способ 2. Синус острого угла α_1, смежного с данным тупым углом α, равен также $\frac{3}{5}$. Построим прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (рис. 52). В нем $\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$. Так как косинусы смежных углов противоположны, то $\cos\alpha = -\cos\alpha_1 = -\frac{4}{5}$. Аналогично, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

44. Точки M_1, M_2, ..., M_8 получаются при повороте радиуса OM единичной полуокружности вокруг точки O против часовой стрелки соответственно на углы 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180° (рис. 53).

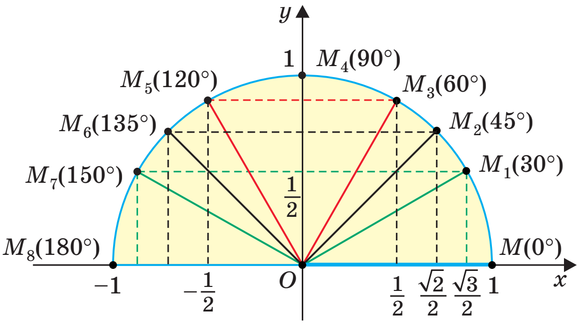


Рис. 53

а) Используя рисунок, найдите координаты точек M, M_1, M_2, ..., M_8.
б) По координатам соответствующих точек найдите $\sin 135°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 150°$.
в)* Найдите $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$.

45. При помощи формул $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ или правил нахождения значений тригонометрических функций тупого угла найдите:

а) $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$;
б) $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 135°$;
в) $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$, $\operatorname{ctg} 150°$.

46. Известно, что угол α тупой. Найдите $\cos\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\alpha = 0,6$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

47. Известно, что $90° < \alpha < 180°$. Найдите $\sin\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; в) $\cos\alpha = -0,2$.

48. а) В $\triangle ABC$ (рис. 54) стороны $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $\sin\angle ABC = \frac{3}{4}$. Найдите высоту AH и S_{ABC}.
б) В параллелограмме $ABCD$ (рис. 55) стороны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos\angle ABC = -0,6$. Найдите высоту CK и S_{ABCD}.

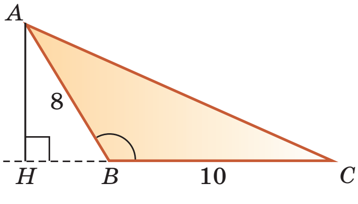


Рис. 54

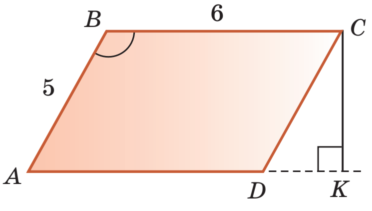


Рис. 55

49. Используя калькулятор (таблицы) и тригонометрические формулы (правила), найдите, округлив ответ до 0,0001:

а) $\sin 100°$; б) $\cos 175°$; в) $\operatorname{tg} 115°$; г) $\operatorname{ctg} 140°$.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

50*. а) Косинус одного из смежных углов равен –0,3. Найдите косинус другого угла.
б) Синус тупого угла параллелограмма равен 0,8. Найдите тангенс острого угла параллелограмма.

51*. Найдите $\sin\alpha + \cos\alpha$, если угол α равен:

а) $0°$; б) $90°$; в) $180°$.

52*. Используя единичную полуокружность, докажите, что при увеличении угла от $0°$ до $90°$ его синус увеличивается от 0 до 1, косинус уменьшается от 1 до 0; при увеличении угла от $90°$ до $180°$ его синус уменьшается от 1 до 0, косинус уменьшается от 0 до –1.

53*. Докажите, что для углов треугольника ABC верно равенство:

а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Гимнастика ума

1. Найдите значение выражения $\cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 30° \cdot \ldots \cdot \cos 180°$.
2. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}\,1° \cdot \mathrm{tg}\,2° \cdot \mathrm{tg}\,3° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\,88° \cdot \mathrm{tg}\,89°$.

§ 5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма

Тригонометрические функции позволяют получить формулы для вычисления площади треугольника и площади параллелограмма. Сформулируем их в виде двух теорем.

Теорема. **Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, т. е. $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.**

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — острый, $AK = h$ — высота (рис. 56, *а*).

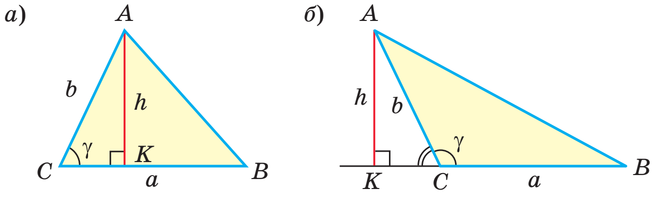


Рис. 56