б) Найдите площадь равнобедренной трапеции с диагональю, равной 12 см, и углом между диагональю и стороной основания, равным 15°.

62*. а) Две стороны треугольника имеют длины a и b. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь треугольника.

б) Диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь четырехугольника.

63*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Используя формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, докажите, что $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

§ 6. Среднее пропорциональное (среднее геометрическое) в прямоугольном треугольнике

Если для положительных чисел a, b и c выполняется пропорция $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то число b называется *средним пропорциональным чисел* a и c (между числами a и c). Из указанной пропорции $b^2 = ac$, откуда $b = \sqrt{ac}$. В такой форме записи число b еще называют *средним геометрическим* чисел a и c.

Пример. Число 4 является средним пропорциональным, или средним геометрическим чисел 2 и 8, так как $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, или $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.

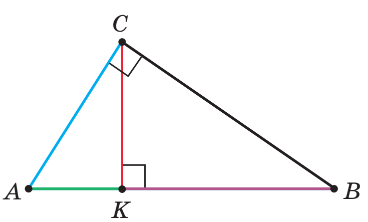


Рис. 61

В прямоугольном треугольнике ABC, где $\angle C = 90°$, проведем высоту CK (рис. 61). Отрезок AK является проекцией катета AC на гипотенузу, а отрезок BK — проекцией катета BC на гипотенузу. Катеты, гипотенуза, высота и проекции катетов на гипотенузу связаны отношениями, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема (о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике).

а) Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е. $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (см. рис. 61).

б) Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т. е. $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.

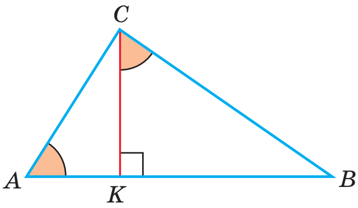


Рис. 62

Доказательство. а) Заметим, что если $\angle ACB = 90°$, $CK \perp AB$, то $\angle BCK = \angle A$ (эти углы дополняют $\angle B$ до $90°$) (рис. 62). Из $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}$, из $\triangle BCK$ $\operatorname{tg}\angle BCK = \frac{BK}{CK}$. Отсюда $\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}$, $CK^2 = AK \cdot BK$, $CK = \sqrt{AK \cdot BK}$.

б) Из $\triangle ACK$ $\cos A = \frac{AK}{AC}$, из $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$, откуда $\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC^2 = AB \cdot AK$, $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$.

Аналогично доказывается, что $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$. Теорема доказана.

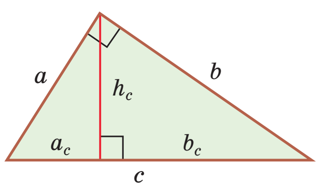


Рис. 63

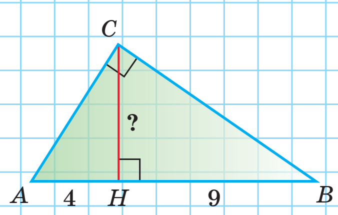
Обозначив катеты a и b, гипотенузу c, высоту h_c, проекции катетов на гипотенузу a_c и b_c (рис. 63), получим следующие формулы:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \text{ или } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$
$$a^2 = c \cdot a_c, \text{ или } a = \sqrt{c \cdot a_c},$$
$$b^2 = c \cdot b_c, \text{ или } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

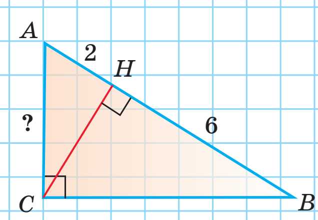
Тест 1

Найдите высоту CH прямоугольного треугольника ABC.



Тест 2

Найдите катет AC прямоугольного треугольника ABC.



Задания к § 6

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

ключевые задачи

Задача 1. *Найти площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 2 см и 8 см.*

Решение. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), $AH = 2$ см — проекция катета AC на гипотенузу, $HB = 8$ см —

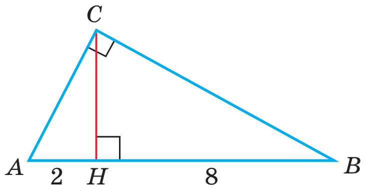


Рис. 64

проекция катета CB на гипотенузу (рис. 64). Так как высота CH есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу, то $CH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см), $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$ (см^2).

Ответ: 20 см^2.

Задача 2. *В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK, $BC = 3\sqrt{5}$ см, $AK = 12$ см* (рис. 65). *Найти гипотенузу AB.*

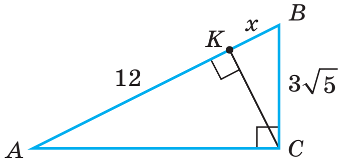


Рис. 65

Решение. Пусть $KB = x$ см, тогда $AB = (x + 12)$ см. Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = AB \cdot KB$, т. е. $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (x + 12) \cdot x$, $x^2 + 12x - 45 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = -15$, $x_2 = 3$. По смыслу задачи $x > 0$. Значит, $KB = 3$ см, $AB = 15$ см.

Ответ: 15 см.

Задача 3*. *При помощи циркуля и линейки построить отрезок, равный среднему геометрическому отрезков m и n.*

Решение. Пусть даны отрезки m и n. Необходимо построить отрезок $x = \sqrt{mn}$.

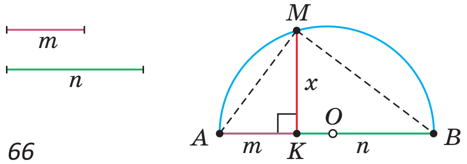


Рис. 66

Построение.

1) На произвольной прямой откладываем данные отрезки: $AK = m$, $KB = n$.

2) На отрезке AB как на диаметре строим полуокружность, для чего находим середину O отрезка AB, откуда OA — радиус данной окружности.

3) Из точки K восстанавливаем перпендикуляр к прямой AB до пересечения с полуокружностью в точке M (рис. 66).

Отрезок $MK = x$ — среднее пропорциональное отрезков $AK = m$ и $KB = n$.

Доказательство. $\angle AMB$ — прямой как вписанный угол, опирающийся на диаметр. В прямоугольном треугольнике AMB высота MK является средним пропорциональным проекций катетов AM и MB на гипотенузу AB: $MK = \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $x = \sqrt{mn}$.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

64. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. По данным на рисунках 67, *а*)—*в*) найдите длину отрезка x.

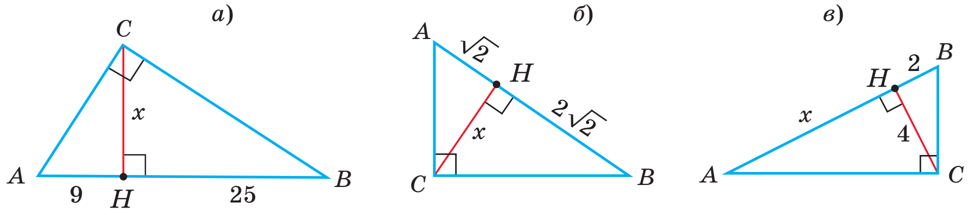


Рис. 67

65. Дан прямоугольный треугольник ABC, CH — высота, опущенная на гипотенузу. Найдите длину отрезка x (рис. 68, *а*)—*в*).

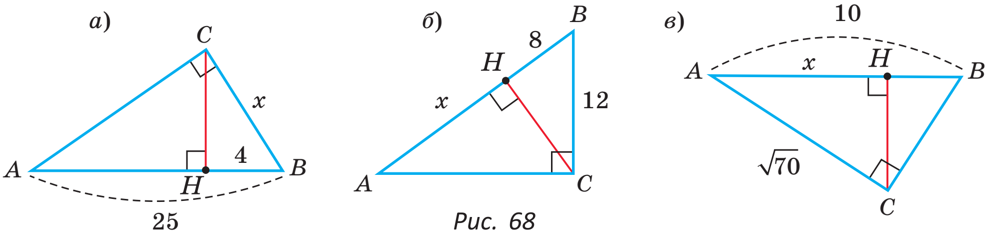


Рис. 68

66. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC равен 8 см, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 12 см. Найдите длину гипотенузы.

67. AB — диаметр окружности (рис. 69). Найдите длину перпендикуляра MK.

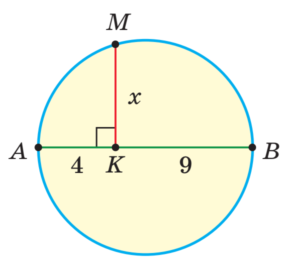


Рис. 69

68. Дан прямоугольник $ABCD$. Перпендикуляр BK, опущенный на диагональ AC, делит ее на отрезки, равные 2 см и 6 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

69. Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого высота делит гипотенузу на отрезки, равные 1,2 см и 4,8 см.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

70*. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен проекции катета BC на гипотенузу AB. Найдите $\cos A$.

71*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CH, катет AC равен 4 см, $BH - AH = 4$ см. Найдите величину угла A.

Повторение*

В 8-м классе мы доказали следующую теорему:

Теорема (о касательной и секущей). *Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки пересечения секущей с окружностью*, т. е. $a^2 = bc$ (рис. 70).

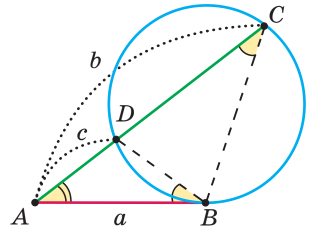


Рис. 70

Как видим, отрезок a является средним пропорциональным между отрезками b и c секущей. Глядя на рисунок 70, вспомните идею доказательства теоремы.

Задача. Найдите AC (см. рис. 70), если $AB = 4$ см, $AD = 2$ см.

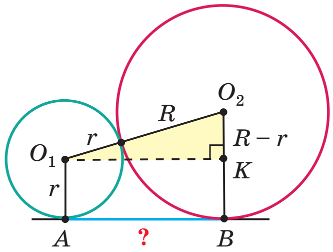


Рис. 71

Также в 8-м классе была рассмотрена ключевая задача о нахождении отрезка общей касательной двух касающихся внешним образом окружностей с радиусами, равными R и r (рис. 71). Был получен ответ: $AB = 2\sqrt{Rr}$, т. е. искомый отрезок AB — это удвоенное среднее геометрическое радиусов окружностей.

Восстановите по рисунку 71 решение этой задачи.

Задача. Найдите длину отрезка AB (см. рис. 71), если $R = 18$ см, $r = 8$ см.

Реальная геометрия

Ребята из 9-го класса нашли высоту своей школы следующим образом. Они измерили угол, под которым видна кромка крыши школы (рис. 72), и расстояние от места измерения до фундамента школы. Угол оказался равным 67°, а расстояние 5 м. Далее они применили алгоритм решения прямоугольного треугольника. Учитывая, что рост школьника, который измерял угол, равен 180 см, ребята нашли примерную высоту школы: 13,6 м. Проверьте, не ошиблись ли ребята в вычислениях. Попробуйте найти подобным образом высоту своей школы.

Прибор, при помощи которого определяют углы на местности, называется *эклиметр*. Такой прибор можно изготовить самостоятельно. Для этого потребуется транспортир, нить с грузом и заостренная палка. Заостренную палку втыкают вертикально в землю так, чтобы нить с грузом располагалась вертикально. Поворачивая транспортир, наблюдатель смотрит вдоль прямой AB (рис. 73). По отклонению нити отвеса на транспортире определяют измеряемый угол. Объясните, как определить искомый угол α.

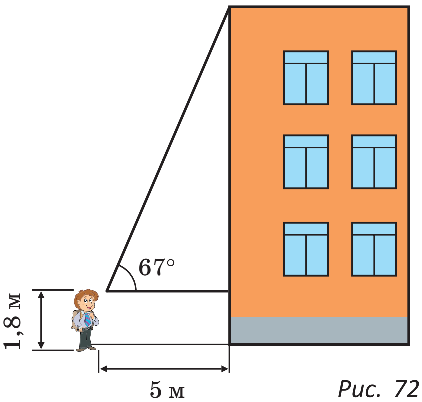


Рис. 72

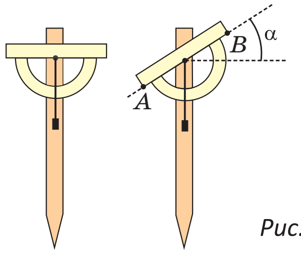


Рис. 73

Геометрия 3D

Напомним, что в основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат и все ее боковые ребра равны.

Задача. На рисунке 74 изображена правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Ее боковое ребро равно 8 см, а угол APC равен 120°. Перенесите чертеж пирамиды в тетрадь. Найдите:

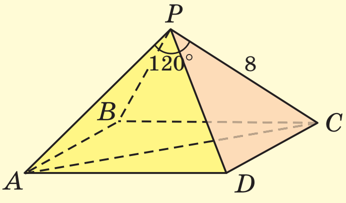


Рис. 74

а) площадь диагонального сечения APC этой пирамиды, сделав отдельно чертеж треугольника APC;

б) длину высоты PO пирамиды, где точка O — центр основания пирамиды;

в) площадь основания пирамиды;

г) объем пирамиды по формуле $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, h — высота пирамиды.

Укажите размеры какого-либо параллелепипеда, который по объему равен данной пирамиде.

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Формулы $\sin(180° - \alpha) = \ldots$, $\cos(180° - \alpha) = \ldots$.
2. Как связаны синус и косинус тупого угла с синусом и косинусом смежного с ним острого угла.
3. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма, связанные с синусом угла.
4. Теорему о среднем пропорциональном (среднем геометрическом) в прямоугольном треугольнике.

Умеем

1. Находить синус, косинус, тангенс и котангенс углов 120°, 135°, 150°.
2. Выводить формулы площади треугольника и площади параллелограмма, связанные с синусом угла.
3. Доказывать теорему о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике.

§ 7*. Креативная геометрия

1. Теорема о площадях треугольников с общим (равным) углом

Площади треугольников, имеющих общий угол (или равный угол), относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (рис. 75), *т. е.* $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB} = \frac{b_1c_1}{bc}$.