§ 8. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение. Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

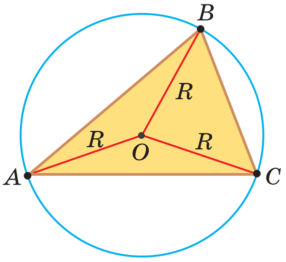


Рис. 90

На рисунке 90 изображена окружность с радиусом R и центром O, описанная около треугольника ABC.

Так как $OA = OB = OC = R$, то центр описанной окружности *равноудален от вершин треугольника*.

Вместо слов «окружность, описанная около треугольника ABC», также говорят «окружность, описанная вокруг треугольника ABC», или «описанная окружность треугольника ABC».

Теорема (об окружности, описанной около треугольника). **Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.**

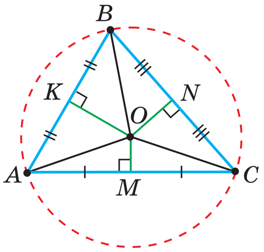


Рис. 91

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 91). Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Проведем отрезки OA, OB и OC. По свойству серединного перпендикуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Так как точка O равноудалена от всех вершин треугольника ABC, то окружность с центром в точке O и радиусом OA проходит через все вершины треугольника ABC, т. е. является его описанной окружностью. Единственность описанной окружности докажите самостоятельно.

Замечание. Так как все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра описанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

Определение. Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

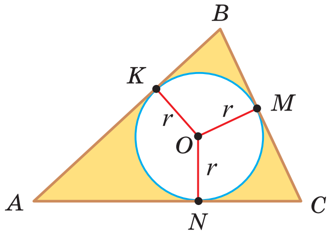


Рис. 92

На рисунке 92 изображена окружность с центром O и радиусом r, вписанная в треугольник ABC; K, M и N — точки ее касания со сторонами треугольника ABC.

Так как $OK = OM = ON = r$ и по свойству касательной к окружности $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то центр вписанной окружности *равноудален от сторон треугольника*.

Вместо слов «окружность, вписанная в треугольник ABC», также говорят «вписанная окружность треугольника ABC».

Теорема (об окружности, вписанной в треугольник).
В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения биссектрис треугольника.

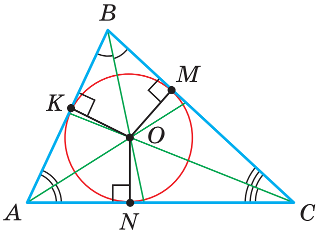


Рис. 93

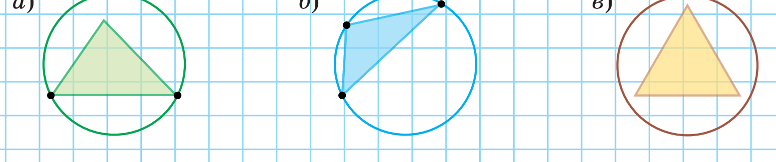
Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 93). Пусть O — точка пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK, OM и ON соответственно к сторонам AB, BC и AC. По свойству биссектрисы угла $OK = ON$, $ON = OM$. Окружность с центром в точке O и радиусом OK будет проходить через точки K, M и N и касаться сторон AB, BC и AC в указанных точках по признаку касательной. Следовательно, эта окружность является вписанной в треугольник ABC. Единственность вписанной окружности докажите самостоятельно.

Замечание. Так как все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра вписанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

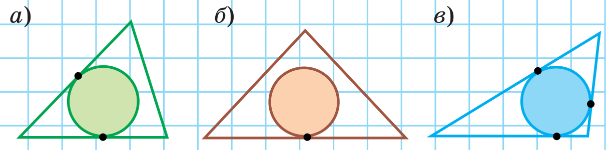
Тест 1

На каком из рисунков изображена окружность, описанная около треугольника?



Тест 2

На каком из рисунков изображена окружность, вписанная в треугольник?



Теорема. **Площадь треугольника можно найти по формуле $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.**

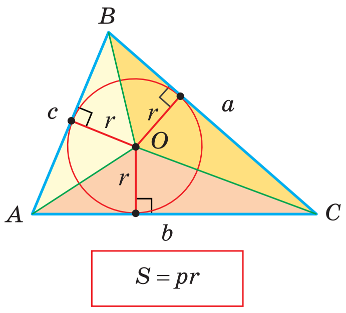


Рис. 94

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — центр его вписанной окружности (рис. 94). Соединим отрезками точку O с вершинами A, B и C. Треугольник ABC разобьется на три треугольника: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радиусы r, проведенные в точки касания, будут высотами этих треугольников. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей указанных треугольников:

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr.$$

Теорема доказана.

Следствие.

Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти по формуле

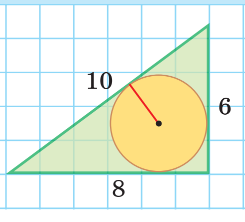
$$r = \frac{S}{p}.$$

Одной из важнейших задач данной темы является задача нахождения радиуса описанной и радиуса вписанной окружностей данного треугольника.

А теперь выполните **Тест 3**.

Тест 3

Используя формулу $S = pr$, найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 6 см, 8 см, 10 см.



Задания к § 8

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, у которого $AB = BC = 26$ см, высота $BK = 24$ см* (рис. 95).

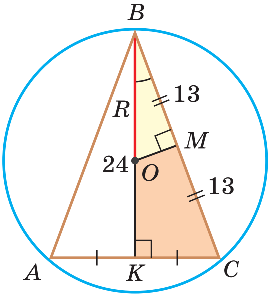


Рис. 95

Р е ш е н и е. *Способ* 1 (метод подобия). Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Проведем серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC, которые пересекутся в точке O — центре описанной окружности. Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, то BK — серединный перпендикуляр к стороне AC. Пусть MO — серединный перпендикуляр к стороне BC. Тогда $BM = 13$ см, $BO = R$ — искомый радиус. Поскольку $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (как прямоугольные с общим острым углом CBK), то $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$, $\frac{13}{R} = \frac{24}{26}$, откуда $R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14\frac{1}{12}$ (см).

Способ 2 (тригонометрический метод). Из $\triangle OBM$ (см. рис. 95) $\cos\angle OBM = \frac{BM}{BO}$, из $\triangle CBK$ $\cos\angle CBK = \frac{BK}{BC}$, откуда $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

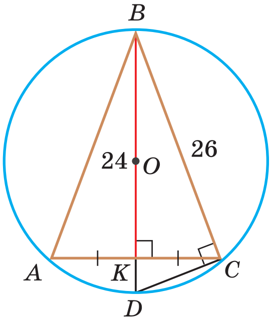


Рис. 96

Способ 3* (среднее пропорциональное). Продлим высоту BK до пересечения с описанной окружностью в точке D (рис. 96). Так как центр описанной окружности равнобедренного треугольника лежит на прямой BK (см. способ 1), то $BD = 2R$ — диаметр данной окружности. В прямоугольном треугольнике BCD ($\angle BCD = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр) катет BC есть среднее пропорциональное между гипотенузой BD и проекцией BK катета BC на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$, откуда $R = 14\frac{1}{12}$ (см).

О т в е т: $14\frac{1}{12}$ см.

Замечание. Из решения ключевой задачи 1 следует свойство: ***«Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на его высоте, проведенной к основанию, или на ее продолжении».***

Верно и обратное утверждение: ***«Если центр окружности, описанной около треугольника, лежит на высоте треугольника или на ее продолжении, то этот треугольник равнобедренный»***.

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Полезно запомнить!

Если в ключевой задаче 1 боковую сторону обозначить b, а высоту, проведенную к основанию, — h_a, то получится пропорция $\dfrac{\frac{b}{2}}{R} = \dfrac{h_a}{b}$. Отсюда следует удобная формула для нахождения радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника:

$$\boxed{R = \frac{b^2}{2h_a}.}$$

Задача 2. *Найти радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.*

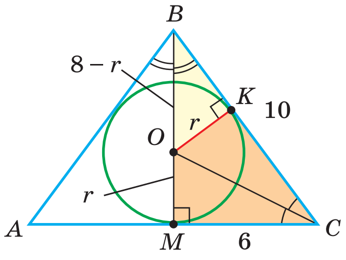


Рис. 97

Решение. *Способ* 1 (метод подобия). Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника. Проведем в треугольнике ABC биссектрисы из вершин B и C, которые пересекутся в точке O — центре вписанной окружности (рис. 97). Биссектриса BM, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC, будет его высотой и медианой, луч CO — биссектриса угла C, $OM = r$ — искомый радиус вписанной окружности. Так как $AM = MC = 6$ см, то из $\triangle BMC$ по теореме Пифагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), откуда $BO = BM - OM = 8 - r$ (см). Проведем радиус OK в точку касания окружности со стороной BC, $OK \perp BC$. Из подобия прямоугольных треугольников BKO и BMC ($\angle MBC$ — общий) следует: $\dfrac{OK}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$. Тогда $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{6}{10}$, $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{3}{5}$, $5r = 3(8-r)$, $8r = 24$, $r = 3$ (см).

Способ 2 (тригонометрический метод). Из $\triangle OBK$ (см. рис. 97) $\sin\angle OBK = \dfrac{OK}{OB}$, из $\triangle MBC$ $\sin\angle MBC = \dfrac{MC}{BC}$, откуда $\dfrac{OK}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

Способ 3 (свойство биссектрисы треугольника). CO — биссектриса $\triangle BMC$. Известно, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Поэтому $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$, $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{6}{10}$, откуда $r = 3$ (см).

Способ 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см^2); $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см). Из формулы площади треугольника $S = pr$ следует: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

Замечание. Из решения ключевой задачи 2 следует свойство: ***«Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на его высоте, проведенной к основанию».***

Верно и обратное утверждение: ***«Если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на высоте треугольника, то этот треугольник равнобедренный».***

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Задача 3. *Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найти радиус R его описанной окружности и радиус r его вписанной окружности.*

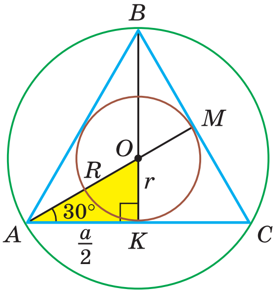


Рис. 98

Решение. *Способ* 1 (тригонометрический метод). Так как в равностороннем треугольнике биссектрисы являются и высотами, и медианами, то его биссектрисы лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Поэтому *в равностороннем треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают.*

Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a, у которого высоты AM и BK пересекаются в точке O — центре описанной и вписанной окружностей (рис. 98). Тогда $OA = OB = R$ — радиусы описанной, $OK = OM = r$ — радиусы вписанной окружности. Так как AM — биссектриса и $\angle BAC = 60°$, то $\angle OAK = 30°$. Поскольку BK — высота и медиана, то $AK = \frac{a}{2}$. Из $\triangle AKO$ $\cos 30° = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

В $\triangle AKO$ катет OK лежит против угла в $30°$, поэтому $OK = \frac{1}{2}AO$, $r = \frac{1}{2}R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Способ 2 (свойство медиан). Поскольку AM и BK — медианы треугольника ABC (см. рис. 98), то по свойству медиан $BO : OK = 2 : 1$. Высоту равностороннего треугольника можно найти по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Откуда $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$r = OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Полезно запомнить!

Поскольку радиус описанной окружности равностороннего треугольника $\boxed{R = \frac{a}{\sqrt{3}}}$, то $\boxed{a = R\sqrt{3}.}$ Значит, сторона равностороннего треугольника в $\sqrt{3}$ раз больше радиуса его описанной окружности. Чтобы найти радиус R описанной окружности равностороннего треугольника, нужно сторону a разделить на $\sqrt{3}$, а чтобы найти его сторону a, нужно радиус R умножить на $\sqrt{3}$. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника $\boxed{r = \frac{1}{2}R.}$

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

86. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O.

а) Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, *а*).
б) Найдите сторону AC, если K — ее середина (рис. 99, *б*).
в) Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, *в*).

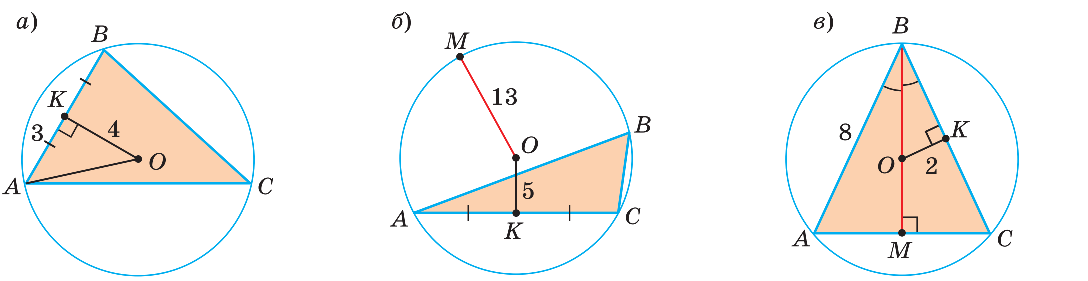


Рис. 99

87. Около треугольника ABC описана окружность. По данным на рисунках 100, *а*)—*в*) найдите расстояние от центра O окружности до прямой AC.

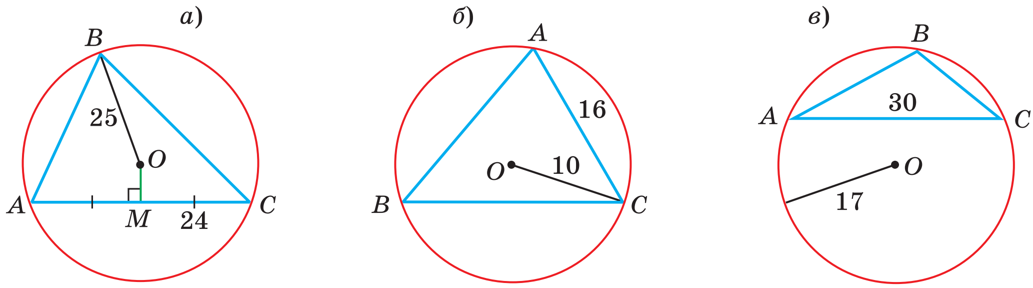


Рис. 100

88. Используя ключевую задачу 1 (с. 60), найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и высотой BK, если:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рис. 101, *а*);
б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рис. 101, *б*).

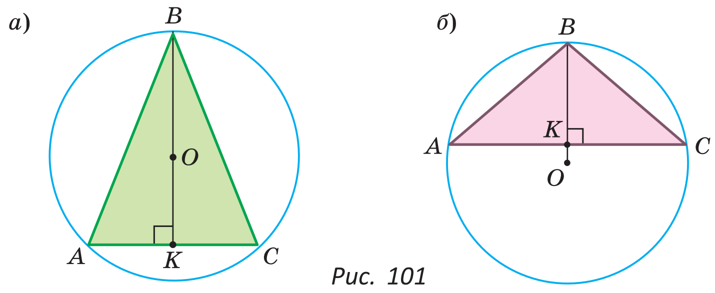


Рис. 101

89. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, высота, проведенная к его основанию, равна 8 см. Найдите площадь данного треугольника.

90. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O.

а) По рисунку 102, *а*) определите радиус вписанной окружности.
б) По рисунку 102, *б*) определите длину отрезка OB, если $\angle ABC = 60°$.
в) По рисунку 102, *в*) определите длину стороны BC, если диаметр вписанной окружности равен $\sqrt{8}$.

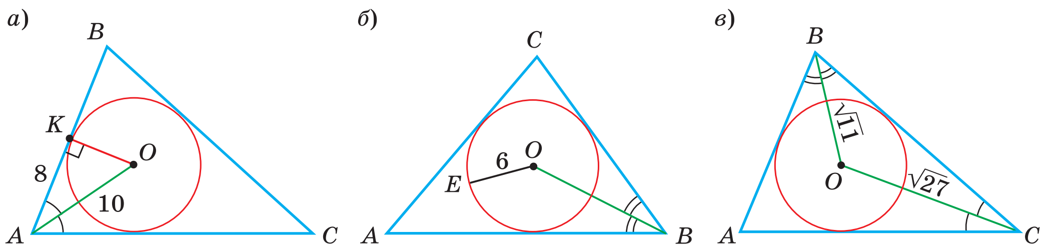


Рис. 102

91. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. По данным на рисунках 103, *а*)—*в*) определите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

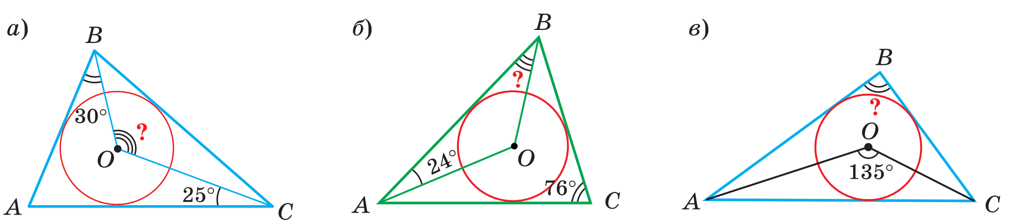


Рис. 103

92. а) Используя ключевую задачу 2 (с. 61), найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 6$ см и высотой $BH = 4$ см, проведенной к основанию (рис. 104).

б) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 10$ см и боковой стороной $AB = 13$ см (рис. 105).

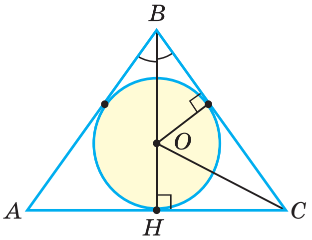


Рис. 104

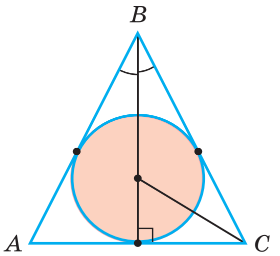


Рис. 105

93. Дан равносторонний треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$ см. Вычислите:

а) радиус описанной окружности этого треугольника;
б) радиус вписанной окружности этого треугольника.

94. а) Найдите радиус R описанной и радиус r вписанной окружности равностороннего треугольника, если его высота $h = 12$ см.
б) Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус R его описанной окружности равен 2 см.

95. а) При помощи циркуля и линейки опишите окружность около тупоугольного треугольника.
б) При помощи циркуля и линейки впишите окружность в прямоугольный треугольник.

96. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120°$. Определите:

а) радиус его описанной окружности;
б) радиус его вписанной окружности.

97. а) Найдите площадь треугольника, у которого периметр равен 18 см, а радиус вписанной окружности — 2 см.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, площадь которого равна 45 см^2, а периметр — 30 см.

98. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, O_1 — центр описанной, O_2 — центр вписанной окружности. Найдите длину отрезка O_1O_2, если $AB = 20$ см, высота $BH = 16$ см.

99. а) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит точкой касания его боковую сторону на отрезки, равные 6 см и 4 см, считая от основания. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

б) Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведенную к основанию, в отношении 4 : 5, считая от основания. Найдите площадь треугольника, если его боковая сторона равна 20 см.

100. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,8, периметр треугольника равен 54 см. Найдите:

а) радиус его вписанной окружности;

б) радиус его описанной окружности.

101. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается его сторон AB, BC и AC соответственно в точках M, N и K. Найдите:

а) $\angle MNK$, если $\angle A = 70°$;

б) $\angle AOB$, если $\angle KMN = 64°$.

102. Окружность с центром в точке O описана около треугольника ABC (рис. 106), $OB = R$ — радиус окружности, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — высота, $OM \perp BC$. Докажите, что:

а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.

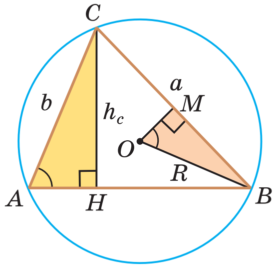


Рис. 106

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

103*. а) В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $BC = 6$ см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.
б) В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, высота $BH = 8$ см. Найдите радиус R описанной окружности.

104*. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Окружность, вписанная в треугольник, касается указанных сторон соответственно в точках M, N, K. Найдите:

а) $AK + MB + NC$; б) длину отрезка AK.

105*. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O (рис. 107), высота AM проходит через точку O, $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Найдите радиус вписанной окружности.

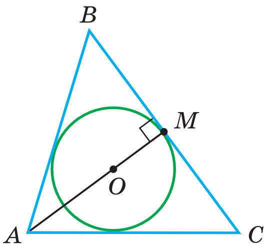


Рис. 107

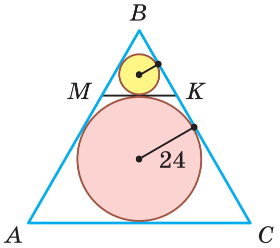


Рис. 108

106*. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность, радиус которой равен 24. Отрезок MK касается этой окружности и параллелен стороне AC (рис. 108). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBK.

107*. Докажите, что если центры описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.

108*. а) Докажите, что около данного треугольника можно описать только одну окружность.
б) Докажите, что в данный треугольник можно вписать только одну окружность.

109*. Дан остроугольный треугольник ABC, H — точка пересечения его высот (ортоцентр), O — центр описанной окружности. Точки O, H, A и C лежат на одной окружности. Найдите величину угла B.

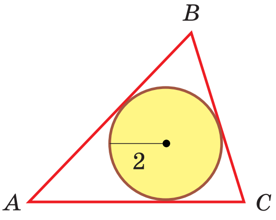


Рис. 109

Гимнастика ума

Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 109), равен 2 см, площадь треугольника $S = 2019$ см^2. Найдите устно периметр P треугольника ABC.

Каким свойством, по вашему мнению, обладает треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен 2? Обоснуйте ваше предположение.

Геометрия 3D

Заготовка представляет собой правильную треугольную призму высотой 2 см, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 6 см (рис. 110). В центре заготовки нужно проделать цилиндрическое отверстие. Расстояние от окружности отверстия до стороны основания равно 0,2 см.

Задание 1. Найдите (округлив результат до 1 мм) диаметр сверла для высверливания нужного отверстия.

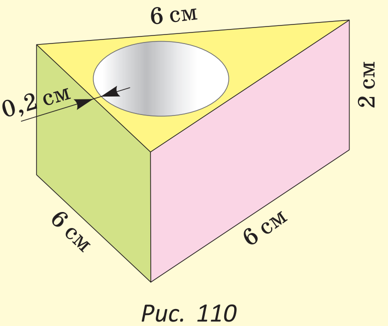


Рис. 110

Задание 2. По формуле объема цилиндра $V_ц = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра, найдите объем цилиндрического отверстия. Примите $\pi \approx 3{,}14$. Ответ округлите до 1 см³.

Задание 3. Учитывая, что объем призмы равен произведению ее площади основания на высоту, т. е. $V_{пр} = S_{осн} \cdot H$, вычислите, сколько процентов составляет объем цилиндрического отверстия от объема призмы. Ответ округлите до 1 %.

§ 9. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности

Теорема. **Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы, т. е. $R = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.**

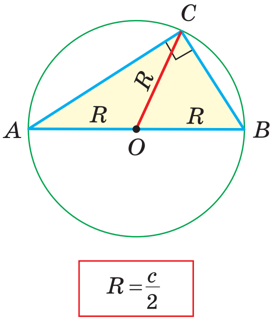


Рис. 111

Доказательство. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC медиану CO к гипотенузе AB (рис. 111). Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $OC = OA = OB$. Тогда середина гипотенузы — точка O — равноудалена от точек A, B и C и поэтому является центром описанной окружности треугольника ABC. Радиус этой окружности $R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.

Теорема доказана.

Замечание. Также можно доказать, что серединные перпендикуляры к катетам прямоугольного треугольника пересекаются на середине гипотенузы.

Отметим, что у остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника (рис. 112, *а*), у тупоугольного — вне треугольника (рис. 112, *б*), у прямоугольного — на середине гипотенузы (рис. 112, *в*). Обоснуйте первые два утверждения самостоятельно.

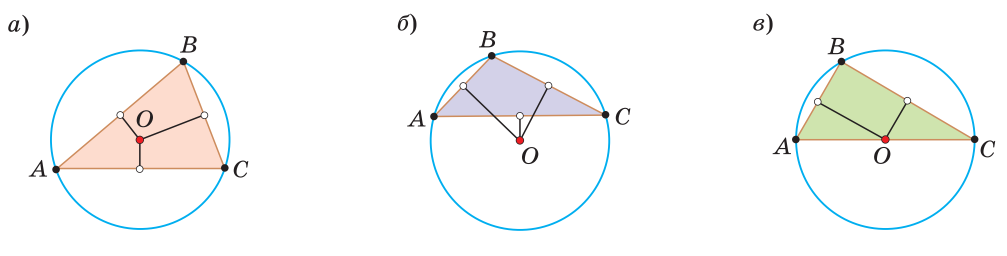


Рис. 112