

§ 8. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение. Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

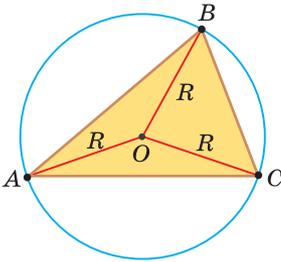


Рис. 90

На рисунке 90 изображена окружность с радиусом R и центром O , описанная около треугольника ABC .

Так как $OA = OB = OC = R$, то центр описанной окружности *равноудален от вершин треугольника*.

Вместо слов «окружность, описанная около треугольника ABC », также говорят «окружность, описанная вокруг треугольника ABC », или «описанная окружность треугольника ABC ».

Теорема (об окружности, описанной около треугольника). Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

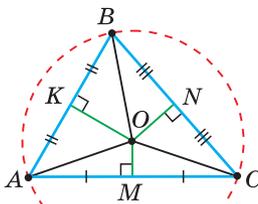


Рис. 91

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 91). Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Проведем отрезки OA , OB и OC . По свойству серединного перпендикуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Так как точка O равноудалена от всех вершин треугольника ABC , то окружность с центром в точке O и радиусом OA проходит через все вершины треугольника ABC , т. е. является его описанной окружностью. Единственность описанной окружности докажете самостоятельно.

Замечание. Так как все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра описанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

Определение. Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

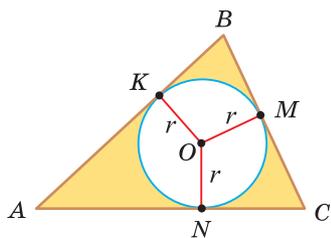


Рис. 92

На рисунке 92 изображена окружность с центром O и радиусом r , вписанная в треугольник ABC ; K , M и N — точки ее касания со сторонами треугольника ABC .

Так как $OK = OM = ON = r$ и по свойству касательной к окружности $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то центр вписанной окружности *равноудален от сторон треугольника*.

Вместо слов «окружность, вписанная в треугольник ABC », также говорят «вписанная окружность треугольника ABC ».

Теорема (об окружности, вписанной в треугольник).

В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения биссектрис треугольника.

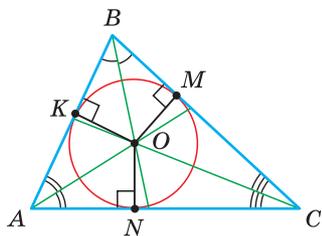


Рис. 93

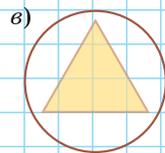
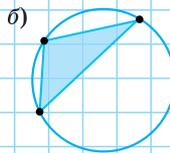
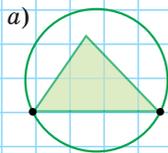
Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 93). Пусть O — точка пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK , OM и ON соответственно к сторонам AB , BC и AC . По свойству биссектрисы угла $OK = ON$, $ON = OM$. Окружность с центром в точке O и радиусом OK будет проходить через точки K , M и N и касаться сторон AB , BC и AC в указанных точках по признаку касательной. Следовательно, эта окружность является вписанной в треугольник ABC . Единственность вписанной окружности докажете самостоятельно.

Замечание. Так как все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра вписанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

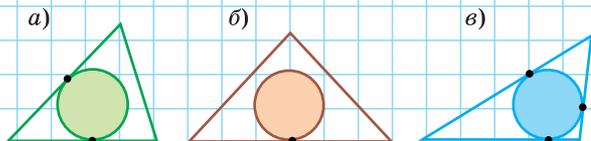
Тест 1

На каком из рисунков изображена окружность, описанная около треугольника?

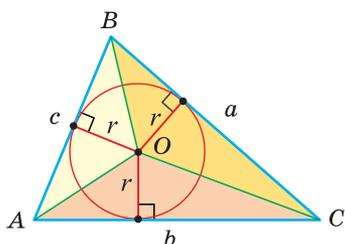


Тест 2

На каком из рисунков изображена окружность, вписанная в треугольник?



Теорема. Площадь треугольника можно найти по формуле $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



$$S = pr$$

Рис. 94

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O — центр его вписанной окружности (рис. 94). Соединим отрезками точку O с вершинами A , B и C . Треугольник ABC разобьется на три треугольника: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радиусы r , проведенные в точки касания, будут высотами этих треугольников. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей указанных треугольников: $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$.

Теорема доказана.

Следствие.

Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти по формуле

$$r = \frac{S}{p}$$

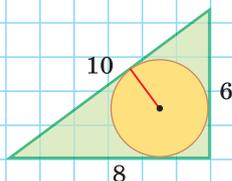
Одной из важнейших задач данной темы является задача нахождения радиуса описанной и радиуса вписанной окружностей данного треугольника.

А теперь выполните **Тест 3**.

Тест 3

Используя формулу $S = pr$, найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 6 см, 8 см, 10 см.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 1,5.





Задания к § 8

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC , у которого $AB = BC = 26$ см, высота $BK = 24$ см (рис. 95).

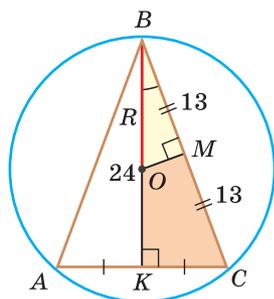


Рис. 95

Решение. *Способ 1* (метод подобия). Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Проведем серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC , которые пересекутся в точке O — центре описанной окружности. Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, то BK — серединный перпендикуляр к стороне AC . Пусть MO — серединный перпендикуляр к стороне BC . Тогда $BM = 13$ см, $BO = R$ — искомым радиус. Поскольку $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (как прямоугольные с общим острым углом CBK), то $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$,

$$\frac{13}{R} = \frac{24}{26}, \text{ откуда } R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14 \frac{1}{12} \text{ (см).}$$

Способ 2 (тригонометрический метод). Из $\triangle OBM$ (см. рис. 95) $\cos \angle OBM = \frac{BM}{BO}$, из $\triangle BCK$ $\cos \angle CBK = \frac{BK}{BC}$, откуда $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

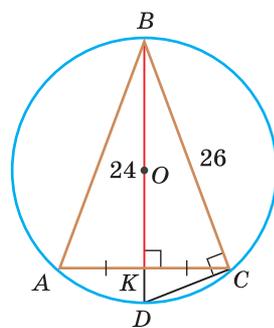


Рис. 96

Способ 3 (среднее пропорциональное). Продлим высоту BK до пересечения с описанной окружностью в точке D (рис. 96). Так как центр описанной окружности равнобедренного треугольника лежит на прямой BK (см. способ 1), то $BD = 2R$ — диаметр данной окружности. В прямоугольном треугольнике BKD ($\angle BCD = 90^\circ$ как вписанный, опирающийся на диаметр) катет BC есть среднее пропорциональное между гипотенузой BD и проекцией BK катета BC на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$. Откуда

$$R = 14 \frac{1}{12} \text{ см.}$$

Ответ: $14 \frac{1}{12}$ см.

Замечание. Из решения ключевой задачи 1 следует свойство: «*Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на его высоте, проведенной к основанию, или на ее продолжении*».

Верно и обратное утверждение: «Если центр окружности, описанной около треугольника, лежит на высоте треугольника или на ее продолжении, то этот треугольник равнобедренный».

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Полезно запомнить!

Если в ключевой задаче 1 боковую сторону обозначить b , а высоту, проведенную к основанию, — h_a , то получится пропорция $\frac{b}{R} = \frac{h_a}{b}$. Отсюда следует удобная формула для нахождения радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника:

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Задача 2. Найти радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

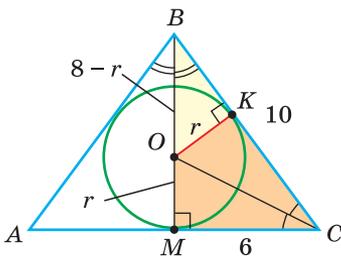


Рис. 97

Решение. Способ 1 (метод подобия). Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника. Проведем в треугольнике ABC биссектрисы из вершин B и C , которые пересекутся в точке O — центре вписанной окружности (рис. 97). Биссектриса BM , проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC , будет его высотой и медианой, отрезок CO — биссектриса угла C , $OM = r$ — искомый радиус вписанной окружности. Так как $AM = MC = 6$ см, то из треуголь-

ника BMC по теореме Пифагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), откуда $BO = BM - OM = 8 - r$. Проведем радиус OK в точку касания окружности со стороной BC , $OK \perp BC$. Из подобия прямоугольных треугольников BKO и BMC ($\angle MBC$ — общий) следует: $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Тогда $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{3}{5}$, $5r = 3(8-r)$, $8r = 24$, $r = 3$. Искомый радиус OM равен 3 см.

Способ 2 (тригонометрический метод). Из треугольника OBK (см. рис. 97) $\sin \angle OBK = \frac{OK}{OB}$, из треугольника BMC $\sin \angle MBC = \frac{MC}{BC}$, откуда $\frac{OK}{OB} = \frac{MC}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

Способ 3 (свойство биссектрисы треугольника). CO — биссектриса треугольника BMC . Известно, что биссектриса треугольника делит противоположающую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Поэтому $\frac{OM}{OB} = \frac{MC}{BC}$, $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, откуда $r = 3$. Искомый радиус — 3 см.

Способ 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см²);
 $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{10+10+12}{2} = 16$ (см). Из формулы площади треугольника $S = pr$ следует: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).
 Ответ: 3 см.

Замечание. Из решения ключевой задачи 2 следует свойство: «**Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на его высоте, проведенной к основанию.**».

Верно и обратное утверждение: «**Если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на высоте треугольника, то этот треугольник равнобедренный.**».

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Задача 3. Дан равносторонний треугольник со стороной a . Найдите радиус R его описанной окружности и радиус r его вписанной окружности.

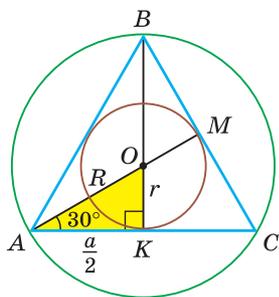


Рис. 98

Решение. *Способ 1* (тригонометрический метод). Так как в равностороннем треугольнике биссектрисы являются и высотами, и медианами, то его биссектрисы лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Поэтому в равностороннем треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a , у которого высоты AM и BK пересекаются в точке O — центре описанной и вписанной окружностей (рис. 98). Тогда $OA = OB = R$ — радиусы описанной, $OK = OM = r$ — радиусы вписанной окружности. Так как AM — биссектриса и $\angle BAC = 60^\circ$, то $\angle OAK = 30^\circ$. Поскольку BK — высота и медиана, то $AK = \frac{a}{2}$. Из треугольника AKO $\cos 30^\circ = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. В треугольнике AKO катет OK лежит против угла в 30° , поэтому $OK = \frac{1}{2}AO$, $r = \frac{1}{2}R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Способ 2 (свойство медиан). Поскольку AM и BK — медианы треугольника ABC (см. рис. 98), то по свойству медиан $BO : OK = 2 : 1$. Высоту равностороннего треугольника можно найти по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Откуда

$$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}; R = BO = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$r = OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Полезно запомнить!

Поскольку радиус описанной окружности равностороннего треугольника $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то $a = R\sqrt{3}$. Значит, сторона равностороннего треугольника в $\sqrt{3}$ раз больше радиуса его описанной окружности. Чтобы найти радиус R описанной окружности равностороннего треугольника, нужно сторону a разделить на $\sqrt{3}$, а чтобы найти его сторону a , нужно радиус R умножить на $\sqrt{3}$. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника $r = \frac{1}{2}R$.

**РЕШАЕМ
САМОСТОЯТЕЛЬНО**

86. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O .

- Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, а).
- Найдите сторону AC , если K — ее середина, $OK = 5$ (рис. 99, б).
- Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, в).

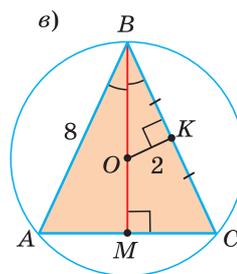
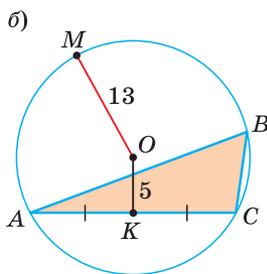
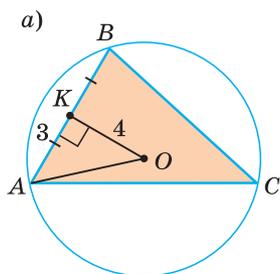


Рис. 99

87. Около треугольника ABC описана окружность. По данным на рисунках 100, а)–в) найдите расстояние от центра O окружности до прямой AC .

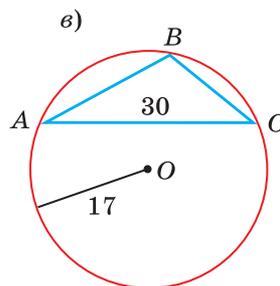
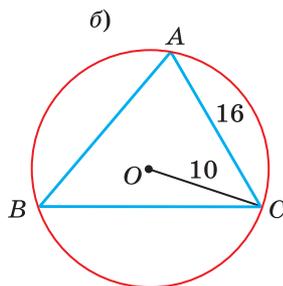
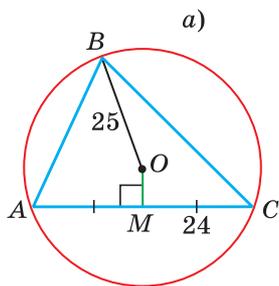


Рис. 100

88. Используя ключевую задачу 1 (с. 60), найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и высотой BK , если:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рис. 101, а);

б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рис. 101, б).

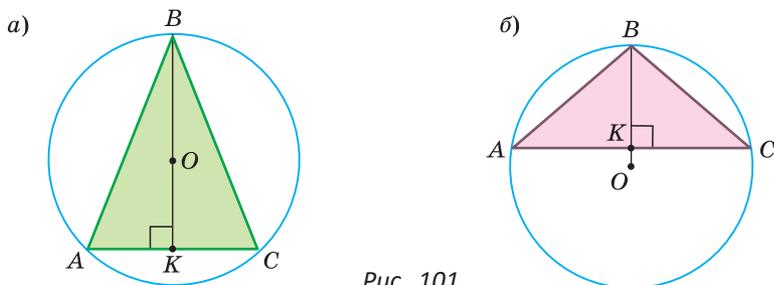


Рис. 101

89. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, высота, проведенная к его основанию, равна 8 см. Найдите площадь данного треугольника.

90. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O .

а) По рисунку 102, а) определите радиус вписанной окружности.

б) По рисунку 102, б) определите длину отрезка OB , если $\angle ABC = 60^\circ$.

в) По рисунку 102, в) определите длину стороны BC , если диаметр вписанной окружности равен $\sqrt{8}$.

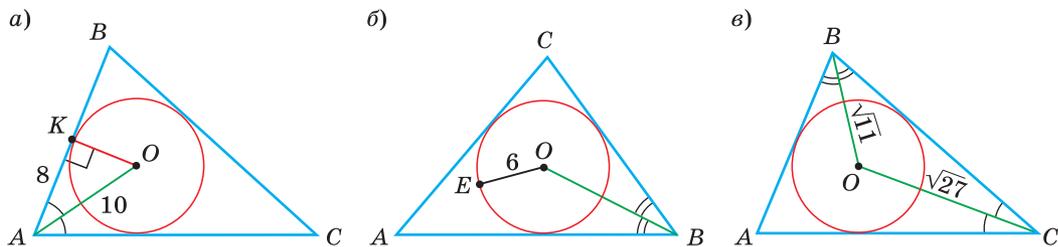


Рис. 102

91. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O . По данным на рисунках 103, а)–в) определите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

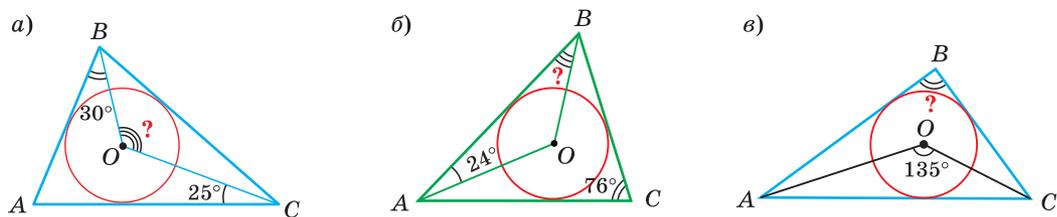


Рис. 103

92. а) Используя ключевую задачу 2 (с. 61), найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 6$ см и высотой $BH = 4$ см, проведенной к основанию (рис. 104).

б) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 10$ см и боковой стороной $AB = 13$ см (рис. 105).

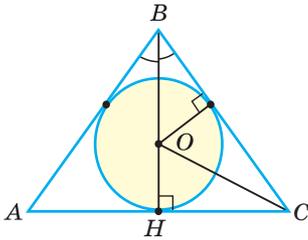


Рис. 104

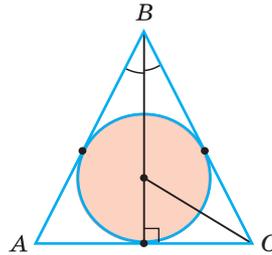


Рис. 105

93. Дан равносторонний треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$ см. Вычислите:

- радиус описанной окружности этого треугольника;
- радиус вписанной окружности этого треугольника.

94. а) Найдите радиус R описанной и радиус r вписанной окружности равностороннего треугольника, если его высота $h = 12$ см.

б) Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус R его описанной окружности равен 2 см.

95. а) При помощи циркуля и линейки опишите окружность около тупоугольного треугольника.

б) При помощи циркуля и линейки впишите окружность в прямоугольный треугольник.

96. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Определите:

- радиус его описанной окружности;
- радиус его вписанной окружности.

97. а) Найдите площадь треугольника, у которого периметр равен 24 см, а радиус вписанной окружности — 2 см.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, площадь которого равна 48 см^2 , а периметр — 32 см.

98. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , O_1 — центр описанной, O_2 — центр вписанной окружности. Найдите длину отрезка O_1O_2 , если $AB = 20$ см, высота $BH = 16$ см.

99. а) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит точкой касания его боковую сторону на отрезки, равные 6 см и 4 см, считая от основания. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.
 б) Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведенную к основанию, в отношении 4 : 5, считая от основания. Найдите площадь треугольника, если его боковая сторона равна 20 см.

100. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,8, периметр треугольника равен 54 см. Найдите:

- а) радиус его вписанной окружности;
 б) радиус его описанной окружности.

101. В треугольник ABC вписана окружность с центром O , которая касается его сторон AB , BC и AC соответственно в точках M , N и K . Найдите:

- а) $\angle MNK$, если $\angle A = 70^\circ$;
 б) $\angle AOB$, если $\angle KMN = 64^\circ$.

102. Окружность с центром в точке O описана около треугольника ABC (рис. 106), $OB = R$ — радиус окружности, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — высота, $OM \perp BC$. Докажите, что:

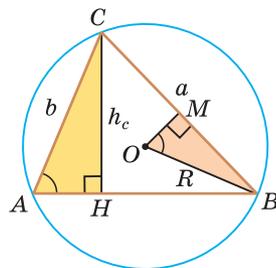


Рис. 106

- а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.

103. а) В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 6$ см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

- б) В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, высота $BH = 8$ см. Найдите радиус R описанной окружности.

104. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Окружность, вписанная в треугольник, касается указанных сторон соответственно в точках M , N , K . Найдите:

- а) длину отрезка AK ;
 б) $AK + MB + NC$.

105. В треугольнике ABC вписана окружность с центром в точке O (рис. 107), высота AM проходит через точку O , $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Найдите радиус вписанной окружности.

106. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность, радиус которой равен 24. Отрезок MK касается этой окружности и парал-

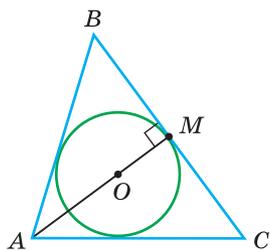


Рис. 107

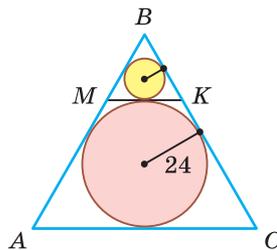


Рис. 108

лелен стороне AC (рис. 108). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBK .

- 107.** Докажите, что если центры описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.
- 108.** а) Докажите, что около данного треугольника можно описать только одну окружность.
б) Докажите, что в данный треугольник можно вписать только одну окружность.
- 109.** Дан остроугольный треугольник ABC , H — точка пересечения его высот (ортоцентр), O — центр описанной окружности. Точки O , H , A и C лежат на одной окружности. Найдите величину угла B .

Гимнастика ума

Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 109), равен 2 см, площадь треугольника $S = 2025 \text{ см}^2$. Найдите устно периметр P треугольника ABC .

Каким свойством, по вашему мнению, обладает треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен 2? Обоснуйте ваше предположение.

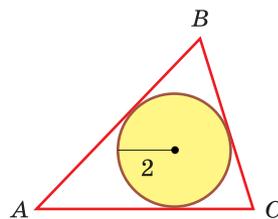


Рис. 109

Геометрия 3D

Заготовка представляет собой правильную треугольную призму высотой 2 см, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 6 см (рис. 110). В центре заготовки нужно проделать цилиндрическое отверстие. Расстояние от окружности отверстия до стороны основания равно 0,2 см.

Задание 1. Найдите (округлив результат до 1 мм) диаметр сверла для высверливания нужного отверстия.

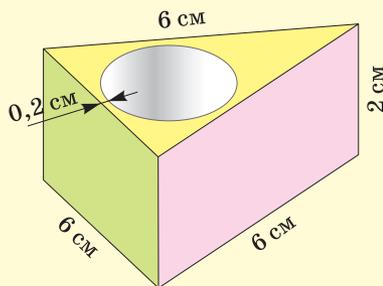


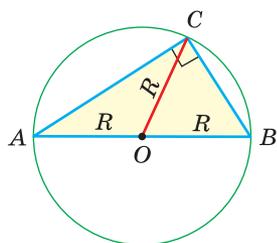
Рис. 110

Задание 2. По формуле объема цилиндра $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра, найдите объем цилиндрического отверстия. Примите $\pi \approx 3,14$. Ответ округлите до 1 см^3 .

Задание 3. Учитывая, что объем призмы равен произведению ее площади основания на высоту, т. е. $V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H$, вычислите, сколько процентов составляет объем цилиндрического отверстия от объема призмы. Ответ округлите до 1% .

§ 9. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности

Теорема. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы, т. е. $R = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.



$$R = \frac{c}{2}$$

Рис. 111

Доказательство. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC медиану CO к гипотенузе AB (рис. 111). Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $OC = OA = OB$. Тогда середина гипотенузы — точка O — равноудалена от точек A , B и C и поэтому является центром описанной окружности треугольника ABC . Радиус этой окружности $R = OA = \frac{1}{2} AB = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.

Теорема доказана.

Замечание. Способ 2. Можно доказать, что серединные перпендикуляры к катетам прямоугольного треугольника пересекаются на середине гипотенузы.

Отметим, что у остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника (рис. 112, а), у тупоугольного — вне треугольника (рис. 112, б), у прямоугольного — на середине гипотенузы (рис. 112, в). Обоснуйте первые два утверждения самостоятельно.

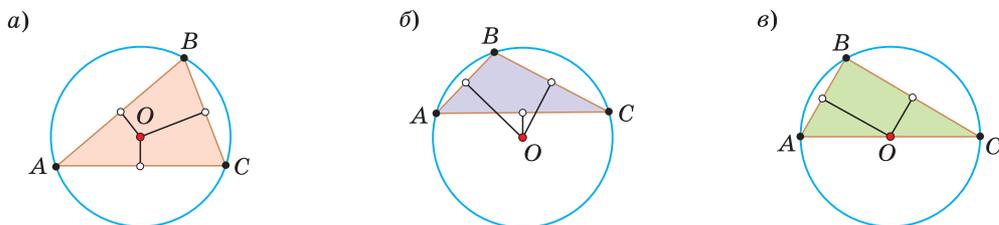


Рис. 112