Задание 2. По формуле объема цилиндра $V_ц = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра, найдите объем цилиндрического отверстия. Примите $\pi \approx 3{,}14$. Ответ округлите до 1 см^3.

Задание 3. Учитывая, что объем призмы равен произведению ее площади основания на высоту, т. е. $V_{пр} = S_{осн} \cdot H$, вычислите, сколько процентов составляет объем цилиндрического отверстия от объема призмы. Ответ округлите до 1 %.

§ 9. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности

Теорема. **Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы, т. е. $R = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.**

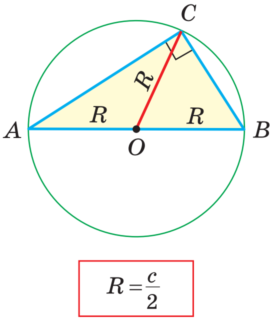


Рис. 111

Доказательство. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC медиану CO к гипотенузе AB (рис. 111). Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $OC = OA = OB$. Тогда середина гипотенузы — точка O — равноудалена от точек A, B и C и поэтому является центром описанной окружности треугольника ABC. Радиус этой окружности $R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$, где c — гипотенуза.

Теорема доказана.

Замечание. Также можно доказать, что серединные перпендикуляры к катетам прямоугольного треугольника пересекаются на середине гипотенузы.

Отметим, что у остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника (рис. 112, *а*), у тупоугольного — вне треугольника (рис. 112, *б*), у прямоугольного — на середине гипотенузы (рис. 112, *в*). Обоснуйте первые два утверждения самостоятельно.

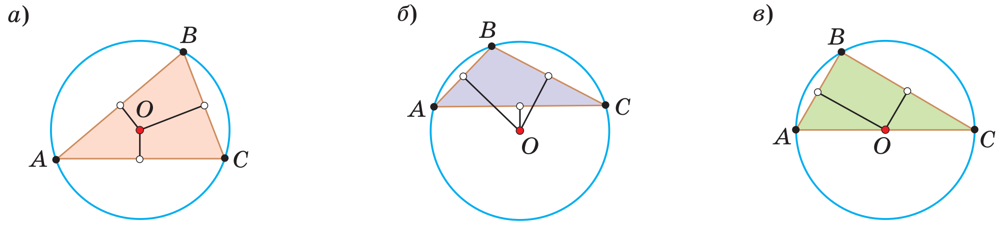
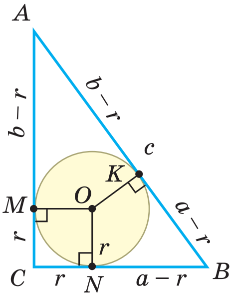


Рис. 112

Теорема. **Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где r — искомый радиус, a и b — катеты, c — гипотенуза треугольника.**



$r = \frac{a+b-c}{2}$

Рис. 113

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$. Пусть вписанная в треугольник окружность с центром O и радиусом r касается сторон треугольника в точках M, N и K (рис. 113). Проведем радиусы в точки касания и получим: $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, $OK \perp AB$. Четырехугольник $CMON$ — квадрат, так как у него все углы прямые и $OM = ON = r$. Тогда $CM = CN = r$, $NB = a - r$, $MA = b - r$. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $BK = BN = a - r$, $AK = AM = b - r$. Но $BK + AK = AB$, т. е. $(a - r) + (b - r) = c$, $a + b - 2r = c$, откуда $r = \frac{a+b-c}{2}$.
Теорема доказана.

Следствие. *$r = p - c$, где p — полупериметр треугольника.*

Доказательство. Преобразуем формулу радиуса вписанной окружности:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула $r = p - c$ в сочетании с формулами $S = pr$ и $R = \frac{c}{2}$ дает возможность решать многие задачи, связанные с прямоугольным треугольником, алгебраическим методом.

Пример. Дан прямоугольный треугольник, $S = 24$, $R = 5$. Найти r.

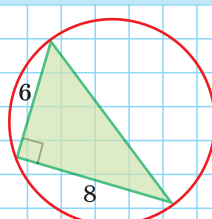
Решение. Так как $r = p - c$, а $R = \frac{c}{2}$, то $p = r + c = r + 2R = r + 10$. Из формулы $S = pr$ следует $24 = (r + 10)r$, $r^2 + 10r - 24 = 0$. По теореме Виета (обратной) $r_1 = 2$, $r_2 = -12$ — посторонний корень.

Ответ: $r = 2$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

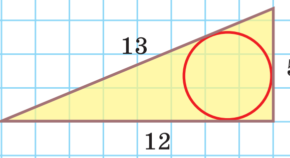
Тест 1

Найдите радиус окружности, описанной около изображенного треугольника.



Тест 2

Найдите радиус окружности, вписанной в изображенный треугольник.



Задания к § 9

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, у которого один из катетов равен* 6, *а радиус вписанной окружности равен* 2.

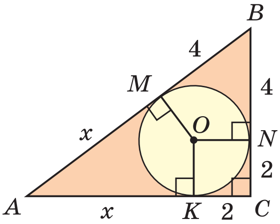


Рис. 114

Решение. *Способ* 1 (геометрический). Пусть в треугольнике ABC, где $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $r = 2$ — радиус вписанной окружности (рис. 114). Проведем из центра O вписанной окружности перпендикуляры OK, OM и ON к сторонам треугольника, которые будут радиусами вписанной окружности. Так как $KONC$ — квадрат, то $NC = KC = r = 2$, $BN = 6 - 2 = 4$. По свойству касательных $BM = BN = 4$, $AM = AK = x$. Тогда $AC = x + 2$, $AB = x + 4$. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$, $4x = 24$, $x = 6$. Следовательно, $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$. Радиус описанной окружности $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Способ 2 (алгебраический). Подставив в формулу $r = \frac{a + b - c}{2}$ значения $r = 2$ и $a = 6$, получим $c = b + 2$. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$, $b = 8$. Тогда $c = 10$, $R = \frac{c}{2} = 5$.

Ответ: 5.

Задача 2*. *Гипотенуза прямоугольного треугольника* $c = 18$, *радиус вписанной в него окружности* $r = 2$. *Найти площадь треугольника.*

Решение. *Способ* 1 (геометрический). Пусть в $\triangle ABC$ гипотенуза $AB = c = 18$, O — центр вписанной окружности, OK, OM, ON — ее радиусы, проведенные в точки касания (рис. 115). Так как $OM \perp AC$, $ON \perp BC$,

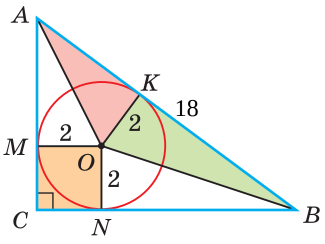


Рис. 115

$OK \perp AB$ и $OM = ON$, то $CMON$ — квадрат со стороной, равной радиусу r вписанной окружности, $OK = r$ — высота $\triangle AOB$. Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $AK = AM$, $BK = BN$. Отсюда $\triangle AKO = \triangle AMO$, $\triangle BKO = \triangle BNO$ по катету и гипотенузе.

Площадь $\triangle ABC$ равна сумме удвоенной площади $\triangle AOB$ и площади квадрата $CMON$, т. е.

$$S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OK + MO^2 = c \cdot r + r^2 = 18 \cdot 2 + 2^2 = 40.$$

Способ 2 (алгебраический). Из формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ следует $2 = \frac{a+b-18}{2}$, $a + b = 22$. Возведем части равенства в квадрат: $(a+b)^2 = 22^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 484$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$ и $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то $c^2 + 4S = 484$, $324 + 4S = 484$, $S = 40$.

Способ 3 (алгебраический). Из формулы $r = p - c$ следует, что $p = r + c$. Из формулы $S = pr$ следует, что $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18) \cdot 2 = 40$.

Ответ: 40.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

110. Используя данные рисунков 116, *а)*—*в)*, найдите радиус описанной окружности треугольника.

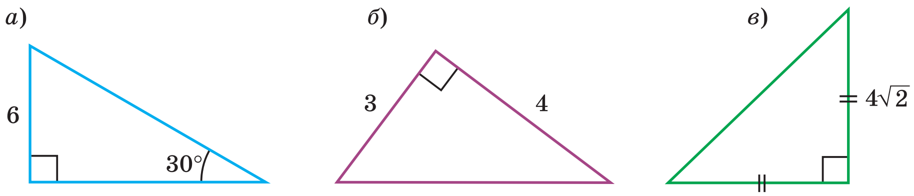


Рис. 116

111. По данным на рисунках 117, *а)*—*в)* найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

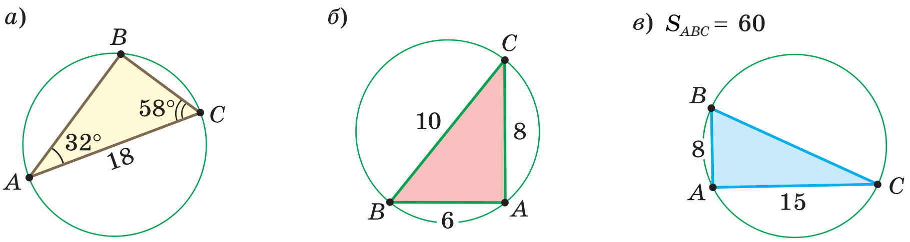


Рис. 117

112. Найдите радиус описанной окружности прямоугольного треугольника с катетами, равными:

а) 12 см и 16 см; б) 18 м и 24 м;
в) 14 дм и 48 дм; г) 1 км и 2 км.

113. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника ABC, если у него один из катетов равен 6 см, а радиус описанной окружности — 5 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен $\frac{2}{3}$.

114. Используя формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, если:

а) $a = 3$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 12$ дм;
в) $a = 7$ см, $c = 25$ см; г) $a = 4$ м, $c = 4\sqrt{2}$ м.

115. Используя данные рисунков 118, *а*)—*г*), найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.

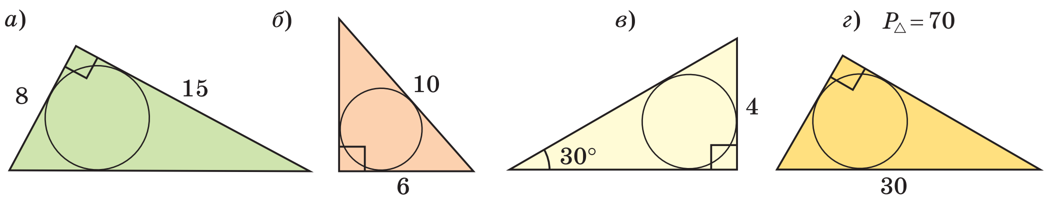


Рис. 118

116. Расстояние от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до гипотенузы равно 6 см. Найдите расстояние от этого центра до вершины прямого угла.

117. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если вписанная окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

118. Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен 13 см, вписанной — 4 см. Найдите периметр и площадь треугольника.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

119*. а) Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, радиус его вписанной окружности равен 2 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.

б) Площадь прямоугольного треугольника равна 30 $см^2$, радиус его описанной окружности равен 6,5 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

120*. Найдите периметр прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза $c = 14$ см, а радиус вписанной окружности $r = 1$ см.

121*. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника со сторонами, равными 12 см, 16 см и 20 см.

122*. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные 9 см и 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

123*. а) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 3 см и 4 см. Найдите площадь треугольника.

б) Докажите, что если точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные m и n, то площадь треугольника можно найти по формуле $S = mn$.

124*. $ABCD$ — прямоугольник (рис. 119), в треугольник BCD вписана окружность с центром O. Докажите, что площадь прямоугольника $AKOM$ равна половине площади прямоугольника $ABCD$.

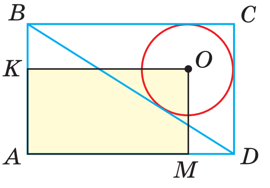


Рис. 119

При помощи **Интернета** найдите *формулу Эйлера*, которая связывает расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей с их радиусами.

Реальная геометрия

Есть два листа ДСП (древесно-стружечной плиты). Один из них имеет форму равностороннего треугольника со стороной 1 м, другой — форму прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными 1 м (рис. 120). Из каждого листа необходимо вырезать по одному кругу наибольшего диаметра. Определите, из какого листа будет вырезан круг большего диаметра и каким в этом случае будет процент отходов, если известно, что площадь круга можно найти по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi \approx 3,14$.

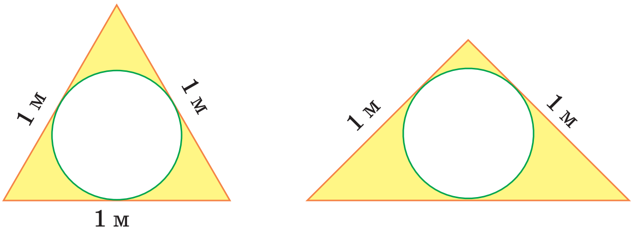


Рис. 120

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Определение описанной и вписанной окружностей треугольника.
2. Где находится центр описанной, а где центр вписанной окружности треугольника.
3. Где находится центр описанной окружности прямоугольного треугольника и чему равен ее радиус R.
4. Формулу радиуса r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.
5. Формулу площади треугольника, связанную с радиусом r вписанной окружности.

Умеем

1. Находить центр описанной окружности треугольника.
2. Находить центр вписанной окружности треугольника.
3. Выводить формулу $S = pr$.
4. Доказывать, что $R = \frac{c}{2}$ для прямоугольного треугольника.
5. Выводить формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ для прямоугольного треугольника.

§ 10. Вписанные и описанные четырехугольники

Определение. *Окружность называется* ***описанной*** *около многоугольника, если она проходит через все его вершины. При этом многоугольник называется* ***вписанным в окружность.***
Окружность называется ***вписанной*** *в многоугольник, если она касается всех его сторон. При этом многоугольник называется* ***описанным около окружности.***

Пятиугольник $ABCDE$ (рис. 121, *а*) является вписанным в окружность, а четырехугольник $MNPK$ (рис. 121, *б*) — описанным около окружности.

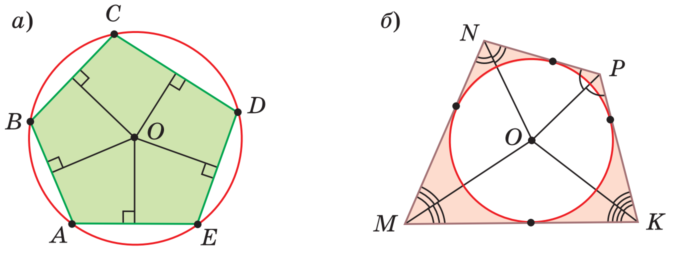


Рис. 121