§ 12. Теорема синусов

Вы уже знаете, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — большая сторона. Пусть a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы треугольника ABC соответственно (рис. 151). Если сторона a — бо́льшая, b — средняя, c — меньшая, то угол α — больший, β — средний, γ — меньший. Установим точную связь между длиной стороны треугольника и величиной противолежащего ей угла.

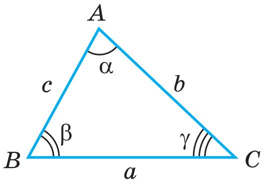


Рис. 151

Теорема синусов. **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу окружности, описанной около треугольника, т. е.**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, R — радиус его описанной окружности. Угол α может быть острым, тупым или прямым. Рассмотрим эти случаи отдельно.

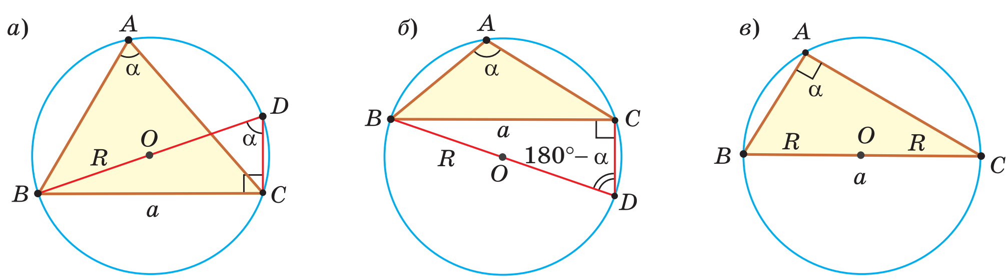


Рис. 152

1) Угол α острый (рис. 152, *а*). Проведя диаметр BD и отрезок DC, получим прямоугольный треугольник BCD, в котором $\angle BCD = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Заметим, что $\angle D = \angle A = \alpha$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. Из прямоугольного треугольника BCD находим $\sin D = \frac{BC}{BD}$, т. е. $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, откуда $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

2) Угол α тупой (рис. 152, *б*). Проведем диаметр BD и отрезок DC. В четырехугольнике $ABDC$ по свойству вписанного четырехугольника $\angle D = 180° - \alpha$. Из прямоугольного треугольника BCD ($\angle BCD = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$. Поскольку $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то

$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, откуда $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справедливость равенства $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ докажите самостоятельно.

В силу доказанного $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, откуда $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Теорема доказана.

Теорема синусов дает возможность решать широкий круг задач. Так, пропорция $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ позволяет решить *две* следующие задачи:

- зная две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них, найти синус угла, противолежащего другой стороне;
- зная два угла треугольника и сторону, противолежащую одному из этих углов, найти сторону, противолежащую другому углу.

С помощью формулы $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ можно решить еще *три* задачи (рис. 153):

- зная сторону треугольника и противолежащий ей угол, найти радиус окружности, описанной около треугольника;
- зная угол треугольника и радиус описанной окружности, найти сторону треугольника, противолежащую данному углу;
- зная сторону треугольника и радиус его описанной окружности, найти синус угла, противолежащего данной стороне.

$\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R}$

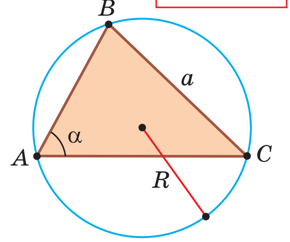
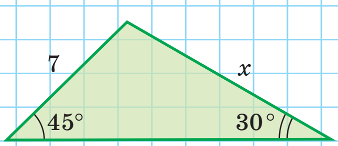


Рис. 153

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

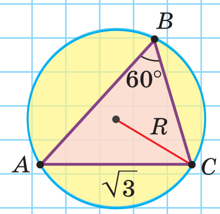
Тест 1

Найдите сторону x треугольника на рисунке, используя теорему синусов: $\dfrac{x}{\sin 45^\circ} = \dfrac{7}{\sin 30^\circ}$.



Тест 2

Найдите величину радиуса R на рисунке, используя формулу $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.



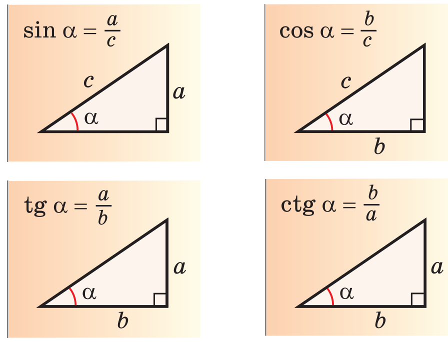
Повторение

1) $\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2},}$ $\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$

2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\quad \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2},}$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$



3) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$

4) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$

Задания к § 12

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *В остроугольном треугольнике известны стороны* $a = 8$, $b = 9$ *и угол* $\alpha = 60^\circ$. *Найти два других угла* β *и* γ, *округлив их значения до* 1°, *и третью сторону треугольника, округлив ее длину до* $0{,}1$.

Р е ш е н и е. По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, откуда $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \frac{9 \cdot \sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9 \cdot 0{,}8660}{8} \approx 0{,}9743$. При помощи калькулятора (таблиц) находим $\beta \approx 77^\circ$. Тогда $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, откуда $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}$, $c = \frac{8 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8 \cdot \frac{0{,}6820}{0{,}8660} \approx 6{,}3$.

О т в е т: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6{,}3$.

Замечание. Если бы по условию треугольник был тупоугольным с тупым углом β, то, зная $\sin\beta \approx 0{,}9743$, вначале мы нашли бы острый угол $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затем, используя формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, получили бы, что $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx \approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

Задача 2. *Доказать справедливость формулы площади треугольника* $\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$ *где* a, b, c *— его стороны,* R *— радиус описанной окружности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известной формулой площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. По теореме синусов $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, откуда $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Тогда $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Выведенная формула позволяет найти радиус описанной окружности треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$.

Задача 3. *Найти радиус R окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC* = 10 *и боковой стороной BC* = 13 (рис. 154).

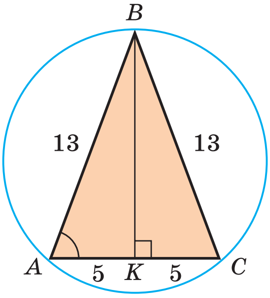


Рис. 154

Решение. *Способ* 1. Из формулы $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ следует, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Найдем $\sin A$. Для этого в треугольнике ABC проведем высоту BK, которая будет и медианой, откуда $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. Из $\triangle ABK$ по теореме Пифагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, откуда $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{12}{13}$.

Тогда $2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{13}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{12}$, $R = \frac{169}{2\cdot 12} = 7\frac{1}{24}$.

Способ 2. Используем формулу $S = \frac{abc}{4R}$, из которой $R = \frac{abc}{4S}$. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BK = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12 = 60$, то $R = \frac{13\cdot 13\cdot 10}{4\cdot 60} = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$.

Ответ: $7\frac{1}{24}$.

*Замечание**. Напомним, что в главе II мы находили радиус R описанной окружности равнобедренного треугольника, проводя серединные перпендикуляры к его сторонам и используя подобие полученных прямоугольных треугольников. Также мы могли использовать формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$, где b — боковая сторона, h_a — высота, проведенная к основанию a. Заменив S в формуле $R = \frac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, получим $R = \frac{ab}{2h_c}$ — формулу радиуса описанной окружности для произвольного треугольника. Итак, мы имеем четыре формулы для нахождения радиуса R описанной окружности треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad R = \frac{ab}{2h_c}, \quad R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

Произвольный треугольник

Равнобедренный треугольник

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО*

173. Перенесите в тетрадь и заполните таблицу, в которой α и β — углы, a и b — соответствующие этим углам стороны треугольника. Для нахождения неизвестных значений используйте пропорцию $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

a	4		$\sqrt{6}$
b		6	2
α	30°	45°	120°
β	45°	60°	

174. По данным на рисунках 155, *а*)—*в*) вычислите длину стороны треугольника, обозначенной знаком вопроса. При расчетах используйте калькулятор (таблицы), результат округлите до 0,1.

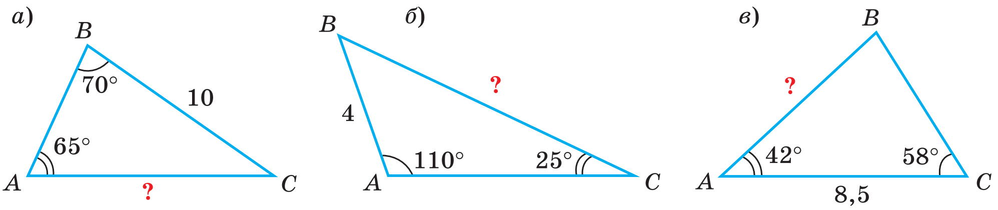


Рис. 155

175. По данным на рисунках 156, *а*)—*в*) вычислите при помощи калькулятора (таблиц) угол треугольника, обозначенный знаком вопроса. Ответ округлите до 1°.

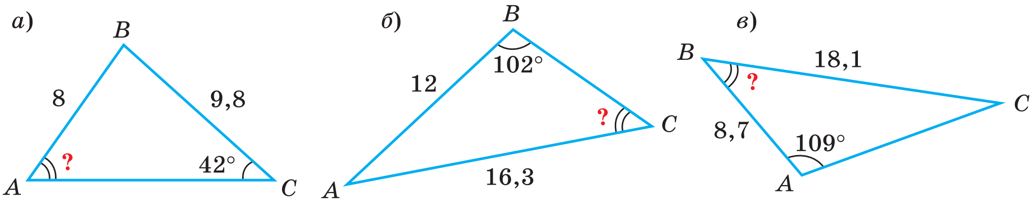


Рис. 156

176. Сделайте схематический чертеж треугольника ABC. При помощи теоремы синусов найдите длину стороны b (округлив ответ до 0,1), если:

а) $a = 4$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$; б) $a = 6{,}5$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$.

177. Сделайте схематический чертеж треугольника ABC. Найдите величину угла B треугольника ABC (округлив ответ до 1°), если:

а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62°$; б) $AB = 4{,}6$, $AC = 4{,}3$, $\angle C = 26°$.

---

* К каждому параграфу имеется резерв задач, помещенный в пособие «Наглядная геометрия. 9 класс» В. В. Казакова.

178. В треугольнике ABC известно: $\sin A = 0{,}8$, $\sin B = 0{,}6$, $AC + BC = 28$ см. Найдите длины сторон AC и BC.

179. По данным на рисунках 157, *а)*—*в)* вычислите:

а) $\angle B$; б) AB; в) BC.

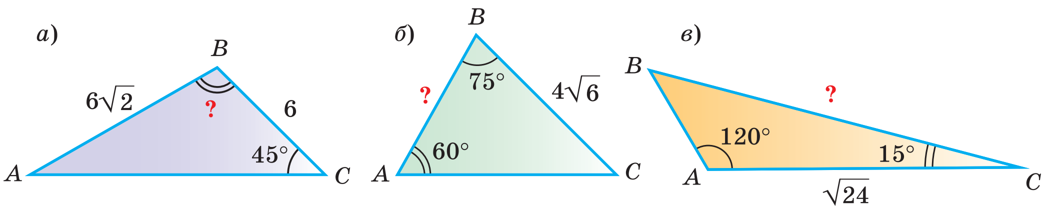


Рис. 157

180. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ острый, $\sin\angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 6$ см.

181. По данным на рисунках 158, *а)*—*в)* найдите радиус R окружности, описанной около треугольника ABC.

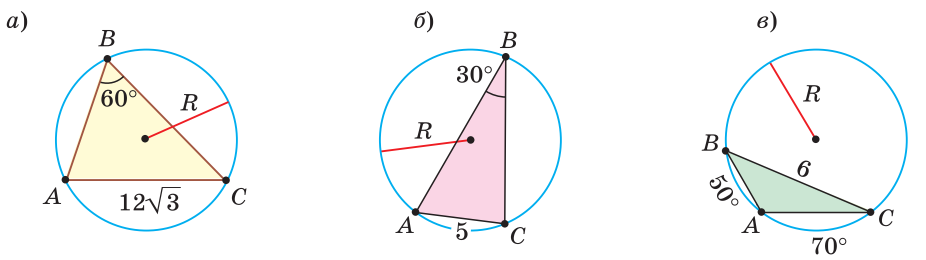


Рис. 158

182. а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 159, *а*), если $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.

б) Найдите длину стороны AB треугольника ABC (рис. 159, *б*), если $\angle C = 60°$, а радиус его описанной окружности $R = 2\sqrt{3}$ см.

в) Найдите величину острого угла B треугольника ABC (рис. 159, *в*), если $AC = \sqrt{8}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 2 см.

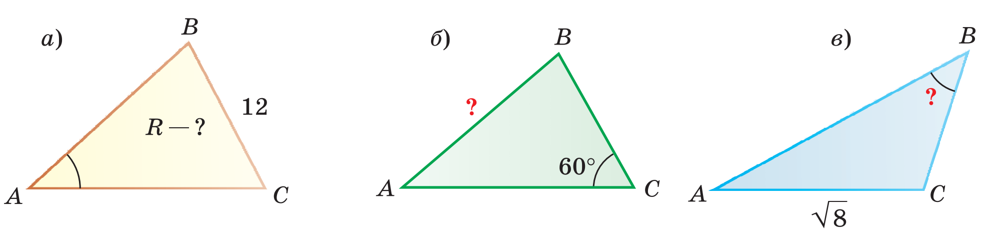


Рис. 159

183. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O и диаметром, равным $16\sqrt{2}$ см. Найдите длину стороны AB треугольника ABC, если $\angle BOC = 160°$ и $\angle ABC - \angle ACB = 10°$.

184. По данным на рисунках 160, *а)*—*в)* вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

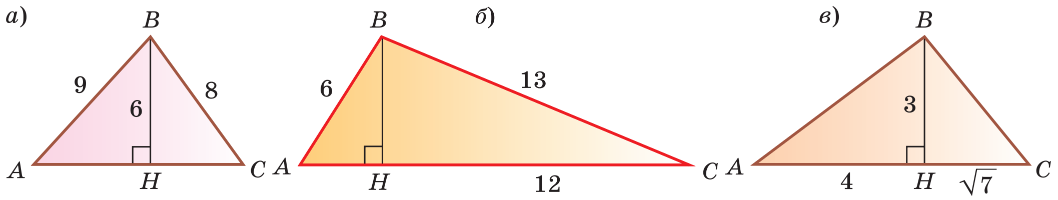


Рис. 160

185. а) В треугольнике ABC $\angle B = 45°$, $\angle C = 105°$, $BC = 6$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

б) Треугольник ABC равнобедренный, основание $AC = 8$ см, угол при основании равен $15°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

в) Докажите, что если один из углов треугольника равен $30°$ или $150°$, то длина стороны треугольника, противолежащей этому углу, равна радиусу окружности, описанной около треугольника.

186. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами:

а) 10 см, 10 см, 12 см;

б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.

187. В треугольнике дана сторона a и углы β, γ. Используя теорему синусов, найдите стороны b и c.

188. Используя формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной a.

189. В прямоугольнике $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, M — середина стороны AD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACM.

190. а) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, диагональ $AC = 8\sqrt{3}$ см. Луч AC является биссектрисой угла BAD, $\angle ACB = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

б) Основания BC и AD вписанной трапеции $ABCD$ равны 11 см и 21 см соответственно, боковая сторона AB равна 13 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

191*. а) Точка M лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABM и CBM равны между собой и не зависят от положения точки M.
б) Дан треугольник ABC. На его стороне AC взята точка M. Докажите, что отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM, не зависит от положения точки M.

192*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если:

а) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$, $C(4;\ 0)$;
б) $A(-2;\ 0)$, $B(6;\ 6)$, $C(6;\ -4)$.

193*. Докажите, что радиус окружности, проходящей через ортоцентр треугольника и две любые его вершины, равен радиусу окружности, описанной около треугольника.

194*. Дан остроугольный треугольник ABC, где $AB < BC$; BM — медиана, BK — биссектриса треугольника. Докажите, используя теорему синусов, что $AK < AM$.

195*. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника больше либо равен половине стороны треугольника.

Моделирование

Задание 1.

1) Составьте алгоритм нахождения при помощи теоремы синусов расстояния от точки A до недоступной точки C (рис. 161), если известно, что $AB = c$, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

2) Выразите $AC = b$ через c, α и β.

3) Найдите AC при условии, что $AB = 30$ м, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$. Ответ округлите до 1 м.

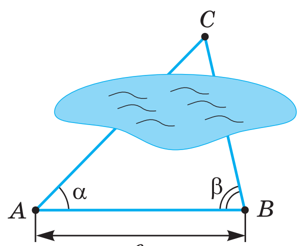


Рис. 161

Задание 2.

1) Глядя на рисунок 162, составьте математическую модель нахождения высоты h башни, длин l_1 и l_2 тросов, идущих от вершины башни к земле. Расстояние от наблюдателя до башни измерить рулеткой нельзя, так как башню окружает ров, но можно измерить углы α и β и расстояние a.

2) Найдите высоту башни и длины тросов при условии, что $a = 4$ м, $\alpha = 63°$, $\beta = 48°$. Ответ округлите до 1 м.

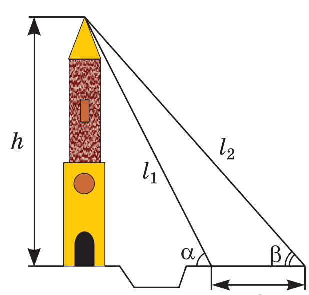


Рис. 162

Рис. 163

Интересно знать. Приборы для измерения углов на местности называются *угломерами*. Они бывают лазерными и электронными. Инженеры-строители пользуются *тахеометрами* (рис. 163).

На рисунке 164 изображен один из символов Беларуси — Каменецкая вежа, расположенная в Брестской области (г. Каменец). Это наиболее хорошо сохранившаяся оборонительная башня, построенная в 1276—1288 годах по приказу князя Владимира Васильковича. Ее высота составляет 31 м. Вежа является памятником романского стиля с элементами ранней готики.

Рис. 164

§ 13. Теорема косинусов

Теорема косинусов позволяет выразить длину любой стороны треугольника через длины двух других его сторон и косинус угла между ними (например, длину стороны a треугольника ABC (рис. 165) через длины сторон b и c и $\cos\alpha$). Теорему косинусов можно назвать самой «работающей» в геометрии. Она имеет многочисленные следствия, которые часто используются при решении задач.

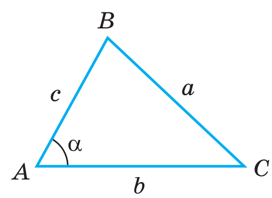


Рис. 165

Теорема косинусов. **Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е.**

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.}$$

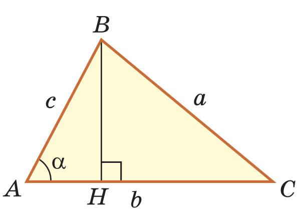


Рис. 166

Доказательство.
Докажем теорему для случая, когда в треугольнике ABC угол A и угол C острые (рис. 166).
Проведем высоту BH к стороне AC. Из $\triangle ABH$ находим $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, откуда $HC = b - c\cos\alpha$.
Из $\triangle BHC$ по теореме Пифагора
$a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 =$
$= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.
По основному тригонометрическому тождеству
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.