Рис. 163

Интересно знать. Приборы для измерения углов на местности называются *угломерами*. Они бывают лазерными и электронными. Инженеры-строители пользуются *тахеометрами* (рис. 163).

На рисунке 164 изображен один из символов Беларуси — Каменецкая вежа, расположенная в Брестской области (г. Каменец). Это наиболее хорошо сохранившаяся оборонительная башня, построенная в 1276—1288 годах по приказу князя Владимира Васильковича. Ее высота составляет 31 м. Вежа является памятником романского стиля с элементами ранней готики.

Рис. 164

§ 13. Теорема косинусов

Теорема косинусов позволяет выразить длину любой стороны треугольника через длины двух других его сторон и косинус угла между ними (например, длину стороны a треугольника ABC (рис. 165) через длины сторон b и c и $\cos\alpha$). Теорему косинусов можно назвать самой «работающей» в геометрии. Она имеет многочисленные следствия, которые часто используются при решении задач.

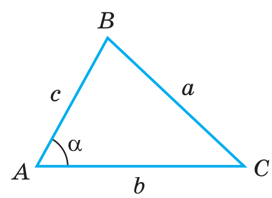


Рис. 165

Теорема косинусов. **Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

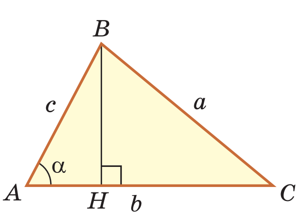


Рис. 166

Доказательство.
Докажем теорему для случая, когда в треугольнике ABC угол A и угол C острые (рис. 166).
Проведем высоту BH к стороне AC. Из $\triangle ABH$ находим $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, откуда $HC = b - c\cos\alpha$.
Из $\triangle BHC$ по теореме Пифагора
$a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 =$
$= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.
По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Справедливость теоремы для случаев, когда $\angle A$ или $\angle C$ тупой или прямой, докажите самостоятельно. Теорема доказана.

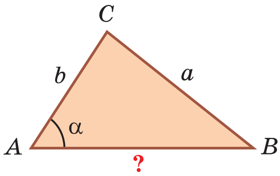
Для сторон b и c теорема косинусов запишется так:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Замечание. Если $\gamma = 90°$, то по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Так как $\cos 90° = 0$, то $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90°$. Таким образом, теорема Пифагора — частный случай теоремы косинусов.

С помощью теоремы косинусов можно решить следующие задачи:

- зная две стороны и угол между ними, найти третью сторону треугольника;
- зная две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, найти третью сторону (рис. 167) (в этом случае возможны два решения).



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Рис. 167

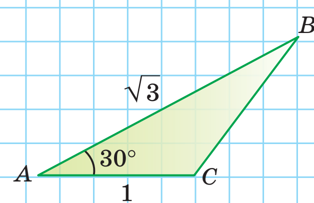
А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

При помощи теоремы косинусов найдите BC:

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = ...$

2) $BC = ...$



Рассмотрим следствия из теоремы косинусов, которые дают возможность решить еще целый ряд задач.

Следствие 1.

Теорема косинусов позволяет, зная три стороны треугольника, найти его углы (косинусы углов). Из равенства $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ *следует формула*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для углов β и γ получим:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Пример 1. В треугольнике ABC стороны $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Найдем $\angle B$ (рис. 168).

По теореме косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$,

$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos B$,

$49 = 64 + 25 - 80\cos B$, $\cos B = \frac{1}{2}$, $\angle B = 60°$.

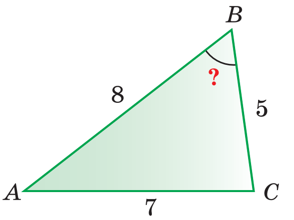


Рис. 168

Используя записанную выше формулу, можно сразу получить: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$.

Следствие 2.

С помощью теоремы косинусов можно по трем сторонам определить вид треугольника: *остроугольный*, *прямоугольный* или *тупоугольный*.

Так, из формулы $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ с учетом того, что $2bc > 0$, следует:

1) если $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos\alpha > 0$ и угол α острый;
2) если $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos\alpha < 0$ и угол α тупой;
3) если $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos\alpha = 0$ и угол α прямой.

При определении вида треугольника достаточно найти знак косинуса угла, лежащего против большей стороны, поскольку только больший угол треугольника может быть прямым или тупым.

Пример 2. Выясним, каким является треугольник со сторонами $a = 2$, $b = 3$ и $c = 4$. Для этого найдем знак косинуса угла γ, лежащего против большей стороны c. Так как $a^2 + b^2 - c^2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = 4 + 9 - 16 < 0$, то $\cos\gamma < 0$, угол γ тупой и данный треугольник тупоугольный.

Сформулируем правило определения вида треугольника (относительно углов). *Треугольник является*:

1) *остроугольным, если квадрат его большей стороны меньше суммы квадратов двух других его сторон*: $a^2 < b^2 + c^2$;

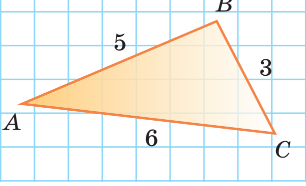
2) *тупоугольным, если квадрат его большей стороны больше суммы квадратов двух других его сторон*: $a^2 > b^2 + c^2$;

3) *прямоугольным, если квадрат его большей стороны равен сумме квадратов двух других его сторон*: $a^2 = b^2 + c^2$.

А теперь выполните **Тест 2**.

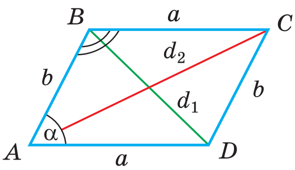
Тест 2

Выясните, каким является треугольник ABC:
а) остроугольным;
б) тупоугольным;
в) прямоугольным.



Следствие 3.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Рис. 169

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AD = a$, $AB = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ и $\angle A = \alpha$ — острый, откуда $\angle B = 180° - \alpha$ — тупой (рис. 169). По теореме косинусов из $\triangle ABD$:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \quad (1)$$

Из $\triangle ABC$: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$. Поскольку $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

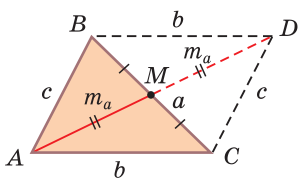
Сложив почленно равенство (1) и равенство (2), получим $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, что и требовалось доказать.

Данная формула дает возможность:

- зная две соседние стороны и одну из диагоналей параллелограмма, найти другую диагональ;
- зная две диагонали и одну из сторон параллелограмма, найти соседнюю с ней сторону.

Следствие 4*.

Медиану m_a треугольника со сторонами a, b и c можно найти по формуле $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

Рис. 170

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = m_a$ — медиана треугольника (рис. 170). Продлим медиану AM за точку M на ее длину: $MD = AM = m_a$. Проведем отрезки BD и DC. Так как у четырехугольника $ABDC$ диагонали AD и BC точкой пересечения делятся пополам, то он — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма $AD^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$, $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Отсюда следует, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Утверждение доказано.

Аналогично: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

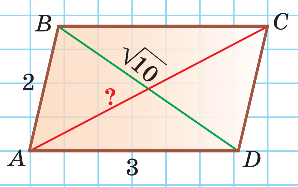
Формула медианы позволяет:

- зная три стороны треугольника, найти любую из его медиан;
- зная две стороны и медиану, проведенную к третьей стороне, найти третью сторону;
- зная три медианы, найти любую из сторон треугольника.

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4***.

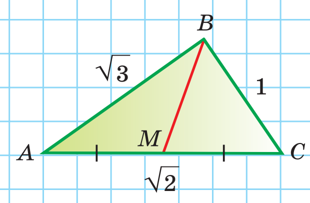
Тест 3

Найдите диагональ AC параллелограмма, зная, что $BD = \sqrt{10}$.



Тест 4*

Найдите медиану BM треугольника ABC по формуле медианы.



Задания к § 13

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

Задача 1. а) *Дан треугольник* ABC, $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 120°$. *Найти сторону* c.
б) *Дан треугольник* ABC, $a = 7$, $c = 8$, $\alpha = 60°$. *Найти сторону* b.

Решение. а) По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma =$
$= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 25 + 9 - 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Отсюда $c = \sqrt{49} = 7$.

б) Пусть $b = x$. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$, то есть $7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60°$, $49 = 64 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Отсюда $b = 3$ или $b = 5$, так как для наборов длин отрезков 7, 3, 8 и 7, 5, 8 выполняется неравенство треугольника.
Ответ: а) 7; б) 3 или 5.

Задача 2. *Две стороны треугольника равны* 6 *и* 10, *его площадь —* $15\sqrt{3}$. *Найти третью сторону треугольника при условии, что противолежащий ей угол — тупой.*

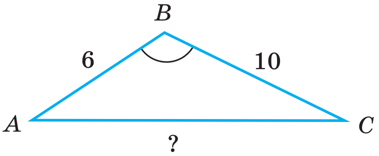


Рис. 171

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ стороны $AB = 6$, $BC = 10$ и $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$ (рис. 171).

Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B$, то $15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin B$, откуда $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\sin 60° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и по условию

$\angle B$ — тупой, то $\angle B = 120°$, $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$. Для нахождения стороны AC применим теорему косинусов: $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos B$, $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, $AC = 14$.

Ответ: 14.

Задача 3*. *Найти площадь треугольника, две стороны которого равны* 6 *и* 8, *а медиана, проведенная к третьей стороне, равна* 5.

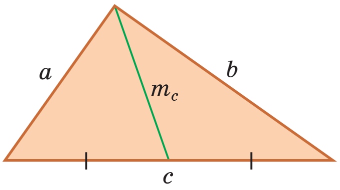


Рис. 172

Решение. Обозначим стороны треугольника a, b, c. Пусть $a = 6$, $b = 8$, $m_c = 5$ — медиана (рис. 172). По формуле медианы $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, откуда $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, $4 \cdot 25 = 72 + 128 - c^2$, $c^2 = 100$, $c = 10$. По обратной теореме Пифагора данный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 — прямоугольный, его площадь равна половине произведения катетов: $S_\triangle = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Ответ: 24.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

196. Используя теорему косинусов, найдите сторону x (рис. 173, *а*, *б*).

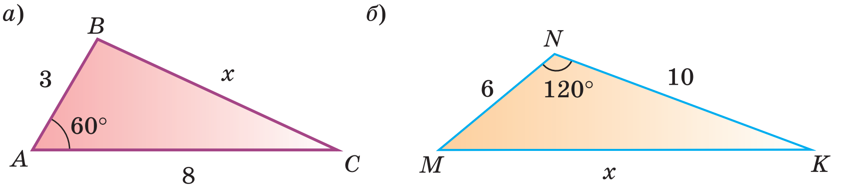


Рис. 173

197. Используя калькулятор (таблицы), найдите сторону c треугольника, округлив результат до 0,1 см, если:

а) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 50°$;
б) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\gamma = 132°$.

198. В треугольнике MNK стороны $MK = 4$ см, $NK = 6$ см, $\cos K = \frac{2}{3}$. Найдите длину стороны MN.

199. В остроугольном треугольнике ABC стороны $AC = 5$ см, $BC = 7$, $\sin C = 0{,}6$. Найдите длину стороны AB.

200. а) Сторона равностороннего треугольника ABC равна 10 см. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 2 : 3$. Найдите длину отрезка AM.

б) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка M так, что $AM : MB = 2 : 1$. Найдите длину отрезка CM, если $AB = 9$ см, $BC = 6$ см.

201. Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, косинус острого угла между ними равен $\frac{2}{7}$. Найдите периметр параллелограмма.

202. В треугольнике ABC проведены медианы $AM = 9$ см и $BK = 6$ см, которые пересекаются в точке E, $\angle MEK = 120°$. Найдите сторону AB треугольника ABC.

203. а) В треугольнике ABC сторона $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30°$, $BC - AB = 4$ см. Вычислите длины сторон AB и BC.

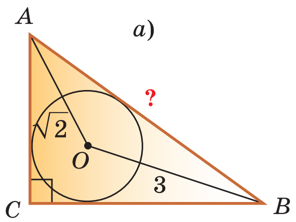
б) В треугольнике ABC сторона $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60°$, $AB : AC = 1 : 2$. Вычислите длины сторон AB и AC.

204. В треугольнике ABC стороны $AB = 5$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$. Найдите наименьшее возможное значение длины стороны AC.

205. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Найдите длину стороны AB, если:

а) $\angle C = 90°$, $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$ (рис. 174, *а*);

б) $\angle AOB = 150°$, $AC = 3$, $BC = 4$ (рис. 174, *б*).



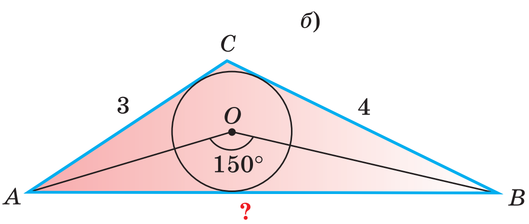


Рис. 174

206. а) В треугольнике ABC стороны $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $AC = 3$ см. Найдите градусную меру угла A.

б) В треугольнике ABC стороны $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Найдите градусную меру угла B.

207. а) Найдите косинус меньшего угла треугольника со сторонами, равными 2 см, 3 см и 4 см.

б) Найдите косинус большего угла треугольника со сторонами, равными 5 см, 6 см, 7 см.

208. Выясните, каким является треугольник (остроугольным, прямоугольным или тупоугольным), если его стороны равны:

а) 10, 8 и 7; б) 20, 21 и 29; в) 5, 6 и 8.

209. а) Периметр треугольника ABC равен 18. Вычислите его площадь по данным рисунка 175.
б) Угол ABC параллелограмма $ABCD$ равен 120°. Вычислите периметр параллелограмма по данным рисунка 176.

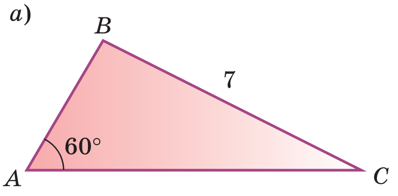


Рис. 175

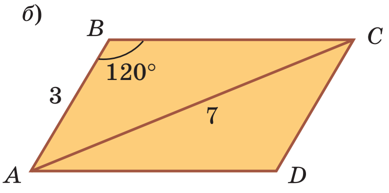


Рис. 176

210. а) В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, диагональ $AC = 6$ см. Найдите длину диагонали BD.

б) В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 2\sqrt{6}$ см, диагонали $AC = 4$ см, $BD = 8$ см. Найдите длину стороны AD.

211. а) В параллелограмме стороны равны 7 см и 9 см, а диагонали относятся как 4 : 7. Найдите диагонали параллелограмма.
б) В параллелограмме одна из диагоналей на 2 см больше другой, а стороны равны 11 см и 13 см. Найдите диагонали параллелограмма.

212. а) В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 4$ см, $AM = 3$ см — медиана (рис. 177). Найдите основание AC треугольника.
б) В треугольнике ABC стороны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. На сторонах BC и AC взяты точки F и K соответственно, такие, что $BF = 2FC$, $AK = KC$ (рис. 178). Найдите длину отрезка KF.

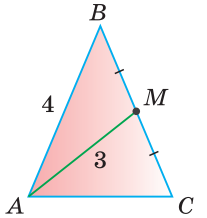


Рис. 177

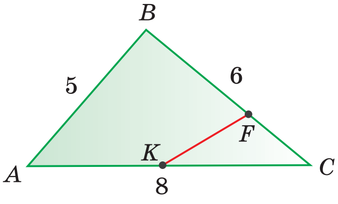


Рис. 178

213. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке K. Найдите периметр треугольника ABC, если $AK = 5$ см, $KC = 10$ см, $\angle A = 60°$.

214. Найдите длину медианы треугольника со сторонами 7 см, 11 см, 12 см, проведенную из вершины большего угла треугольника.

215. а) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали $AC = 6$ см, $BD = 9$ см, O — точка пересечения диагоналей, $\cos\angle COD = \frac{1}{4}$. Найдите среднюю линию трапеции.

б) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), диагональ AC равна 9 см, $AD - CD = 3$ см, $\cos\angle CAD = \frac{5}{6}$. Найдите периметр трапеции.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

216*. Две стороны треугольника равны 8 см и 14 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите третью сторону треугольника.

217*. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 3$. Найдите диагональ BD.

218*. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 2 и 3, а угол между ними равен 60°. Найдите диагонали четырехугольника.

219*. В треугольнике ABC $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Докажите, что с увеличением угла A сторона a увеличивается.

220*. Выясните, каким является треугольник с высотами, равными 3, 4 и 5: остроугольным, прямоугольным или тупоугольным.

221*. Докажите, что площадь параллелограмма (не являющегося прямоугольником) можно вычислить по формуле $S = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$, где d_1, d_2 — диагонали ($d_2 > d_1$), α — острый угол параллелограмма.

Реальная геометрия

Задание 1. Объясните, как можно найти расстояние между точками A и B (рис. 179), если известны расстояния от точки M, где находится наблюдатель, до точек A и B и угол AMB. Найдите это расстояние при условии, что $MA = 30$ м, $MB = 20$ м, $\angle AMB = 68°$. Ответ округлите до метров.

(Для самоконтроля. Ответ: искомое число в метрах равно числу дней в феврале високосного года.)

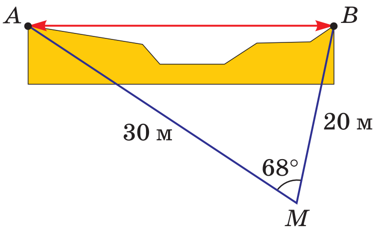


Рис. 179

Задание 2. Из одного населенного пункта выходят две дороги, угол между которыми $60°$ (рис. 180). Одновременно по одной дороге выезжает автомобиль со скоростью 80 км/ч, по другой — автобус со скоростью 50 км/ч. Определите в минутах, через какое время расстояние между автобусом и автомобилем станет равным 7 км.

(Для самоконтроля. Ответ: искомое число равно n, где 1) — Меркурий; 2) — Венера; 3) — Земля; ...; n) — Сатурн.)

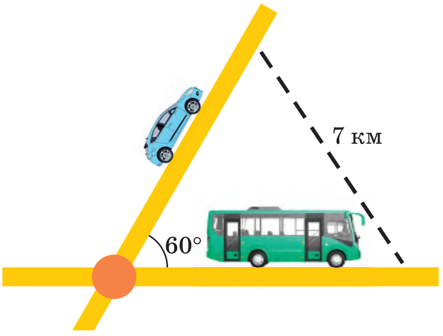


Рис. 180

Задание 3. Определите угол обстрела футбольных ворот с 11-метровой отметки (рис. 181). Для этого можно найти в Интернете размеры футбольных ворот и произвести расчеты. А можно выйти на школьное футбольное поле, измерить шагами расстояние от 11-метровой отметки до одной из стоек ворот, например расстояние AB (расстояние AC будет таким же), и ширину ворот, т. е. длину BC. Затем при помощи теоремы косинусов следует найти $\angle BAC = \alpha$. Попробуйте оба способа и сравните результаты.

(Для самоконтроля. Ответ: искомое число градусов равно числу лет, прожитых А. С. Пушкиным.)

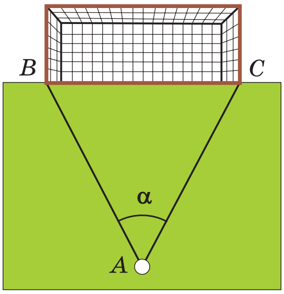


Рис. 181

Геометрия 3D

Задание. Дана прямая треугольная призма (боковые грани — прямоугольники), в основании которой лежит треугольник со сторонами 5 см и 6 см. Косинус угла α между ними равен 0,6 (рис. 182). Бóльшая по площади боковая грань призмы является квадратом.

Найдите:

а) площадь боковой поверхности призмы;

б) площадь полной поверхности призмы.

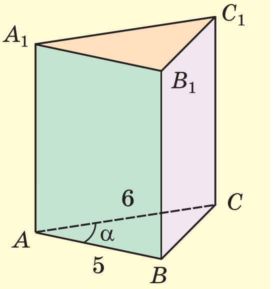


Рис. 182

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Теорему синусов.
2. Основные задачи, которые позволяет решить теорема синусов.
3. Теорему косинусов.
4. Алгоритм нахождения косинуса угла треугольника по трем сторонам.
5. Формулу, связывающую стороны и диагонали параллелограмма.
6. Как по трем сторонам треугольника определить его вид: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

7*. Формулу медианы треугольника.

Умеем

1. Доказывать теорему синусов.
2. По двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, находить угол, противолежащий другой стороне.
3. По двум углам и стороне, противолежащей одному из углов, находить сторону, противолежащую другому углу.
4. По стороне треугольника и противолежащему ей углу находить радиус описанной окружности.
5. Доказывать теорему косинусов.
6. Находить косинус угла треугольника, зная три его стороны.
7. Находить диагональ параллелограмма, зная две его соседние стороны и другую диагональ.

8*. Находить медиану треугольника, зная три его стороны.

§ 14. Формула Герона. Решение треугольников

1. Формула Герона

Мы знаем, как найти площадь треугольника по основанию и высоте, проведенной к этому основанию: $S = \frac{1}{2}ah$, а также по двум сторонам и углу между ними: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Теперь мы выведем формулу нахождения площади треугольника по трем сторонам.

Теорема (формула Герона).
Площадь треугольника со сторонами a, b и c можно найти по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.