## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Теорему синусов.
2. Основные задачи, которые позволяет решить теорема синусов.
3. Теорему косинусов.
4. Алгоритм нахождения косинуса угла треугольника по трем сторонам.
5. Формулу, связывающую стороны и диагонали параллелограмма.
6. Как по трем сторонам треугольника определить его вид: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

7*. Формулу медианы треугольника.

### Умеем

1. Доказывать теорему синусов.
2. По двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, находить угол, противолежащий другой стороне.
3. По двум углам и стороне, противолежащей одному из углов, находить сторону, противолежащую другому углу.
4. По стороне треугольника и противолежащему ей углу находить радиус описанной окружности.
5. Доказывать теорему косинусов.
6. Находить косинус угла треугольника, зная три его стороны.
7. Находить диагональ параллелограмма, зная две его соседние стороны и другую диагональ.

8*. Находить медиану треугольника, зная три его стороны.

# § 14. Формула Герона. Решение треугольников

## 1. Формула Герона

Мы знаем, как найти площадь треугольника по основанию и высоте, проведенной к этому основанию: $S = \frac{1}{2}ah$, а также по двум сторонам и углу между ними: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Теперь мы выведем формулу нахождения площади треугольника по трем сторонам.

Теорема (формула Герона).
**Площадь треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$ можно найти по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.**

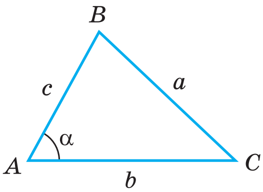



*Рис. 183*

Доказательство. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рис. 183). Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следует, что $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Для $0° < \alpha < 180°$ синус положительный. Поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Из теоремы косинусов $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, откуда $\cos^2\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$.

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} =$

$= bc\cdot\frac{1}{bc}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2}} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$.

Так как $\frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a-2a}{2} = p-a$, $\frac{a-b+c}{2} = \frac{a+c+b-2b}{2} = p-b$, $\frac{a+b-c}{2} =$ $= \frac{a+b+c-2c}{2} = p-c$, то $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Теорема доказана.

## 2. Решение треугольников

*Решением треугольника* называется нахождение его неизвестных сторон и углов (иногда других элементов) по данным, определяющим треугольник. Такая задача часто встречается на практике, например в геодезии, астрономии, строительстве, навигации.

Рассмотрим *алгоритмы* решения трех задач.

**Задача *A*** (решение треугольника по двум сторонам и углу между ними).

Дано: $a$, $b$, $\gamma$ (рис. 184).

Найти: $c$, $\alpha$, $\beta$.

Решение.

1) По теореме косинусов $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

2) По следствию из теоремы косинусов $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

3) Угол $\alpha$ находим при помощи калькулятора или таблиц.

4) Угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

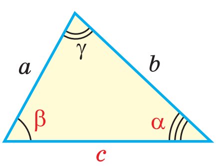



*Рис. 184*

*Замечание.* Нахождение угла $\alpha$ по теореме синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},\ \sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{c}\right)$ требует выяснения того, острый или тупой угол $\alpha$.

**Задача *B*** (решение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам).

Дано: $a$, $\beta$, $\gamma$ (рис. 185).

Найти: $\alpha$, $b$, $c$.

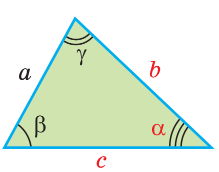



*Рис. 185*

Решение.

1) Угол $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

2) По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ ($\sin\alpha$ и $\sin\beta$ находим при помощи калькулятора или таблиц).

3) Сторону $c$ можно найти с помощью теоремы косинусов или теоремы синусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ или $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ ($\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ находим при помощи калькулятора или таблиц).

**Задача *C*** (решение треугольника по трем сторонам).

Дано: $a$, $b$, $c$ (рис. 186).

Найти: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и радиус $R$ описанной окружности.

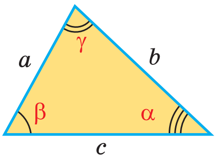


*Рис. 186*

Решение:

1) По следствию из теоремы косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

2) Зная $\cos\alpha$, угол $\alpha$ находим при помощи калькулятора или таблиц.

3) Аналогично находим угол $\beta$.

4) Угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

5) Радиус $R$ описанной окружности треугольника можно найти по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

*Замечание**. Вторым способом нахождения $R$ будет нахождение косинуса любого угла при помощи теоремы косинусов $\left(\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$, затем нахождение по косинусу угла его синуса $\left(\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\right)$ и, наконец, использование теоремы синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = 2R\right)$ для нахождения $R$.

## Задания к § 14

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти площадь $S$ и радиус $R$ описанной окружности треугольника со сторонами* 9, 12 *и* 15.

Решение. *Способ* 1. Воспользуемся формулой Герона. Обозначим $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Получим: $p = \frac{9+12+15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тогда $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радиус $R$ описанной окружности найдем из формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Имеем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 15}{4 \cdot 54} = 7{,}5$.

Ответ: $S = 54$, $R = 7{,}5$.

*Способ* 2. Так как $9^2 + 12^2 = 15^2$, поскольку $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то треугольник — прямоугольный по обратной теореме Пифагора. Его площадь равна половине произведения катетов: $S = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$, а радиус описанной окружности равен половине гипотенузы: $R = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

**Задача 2.** *Найти площадь трапеции с основаниями, равными* 5 *и* 14, *и боковыми сторонами, равными* 10 *и* 17.

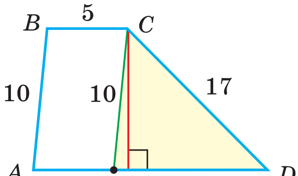



*Рис. 187*

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = 14$ и $BC = 5$, боковые стороны $AB = 10$ и $CD = 17$. Проведем $CK \parallel AB$ (рис. 187). Так как $ABCK$ — параллелограмм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, откуда $KD = AD - AK = 9$. Найдем высоту $CH$ треугольника $KCD$, которая равна высоте трапеции. Площадь треугольника $KCD$ найдем по формуле Герона, обозначив его стороны $a = 10$, $b = 17$, $c = 9$. Получим:

$$p = \frac{10 + 17 + 9}{2} = 18, \; p - a = 18 - 10 = 8,$$

$$p - b = 18 - 17 = 1, \; p - c = 18 - 9 = 9,$$

$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36$. Так как $S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH$, то $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36$, $CH = 8$. Площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{14 + 5}{2} \cdot 8 = 76$.

Ответ: 76.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**222.** Стороны треугольника $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Найдите:

а) полупериметр треугольника $p = \frac{a + b + c}{2}$;

б) значения выражений $p - a$, $p - b$, $p - c$;

в) площадь треугольника по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}$.

**223.** При помощи формулы Герона найдите площадь треугольника со сторонами:

а) 7 см, 15 см, 20 см; б) 10 м, 10 м, 4 м.

**224.** а) Найдите площадь параллелограмма, одна сторона которого равна 15 см, а диагонали — 8 см и 26 см.
б) Найдите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 9 см и 10 см, а одна из диагоналей — 17 см.

**225.** а) Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 20 см, 13 см, 11 см.
б) Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 40 см, 37 см, 13 см.

**226.** а) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 5 см и 15 см, а боковые стороны — 9 см и 17 см.
б) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 3 см и 12 см, а диагонали — 13 см и 14 см.

**227.** Найдите площадь треугольника и радиус описанной окружности треугольника со сторонами 15 см, 13 см и 4 см.

**228.** Решите треугольник, у которого известны:

а) $a = 4$; $b = 5$; $\gamma = 30°$; б) $a = 1$; $b = 2$; $\gamma = 45°$;
в) $a = 8$; $\beta = 60°$; $\gamma = 50°$; г) $b = 10$; $\beta = 100°$; $\gamma = 32°$;
д) $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; е) $a = 50$; $b = 40$; $c = 20$.

**229.** Медианы, проведенные к двум сторонам треугольника, равны 12 см и 9 см, третья сторона треугольника равна 6 см. Найдите площадь треугольника.

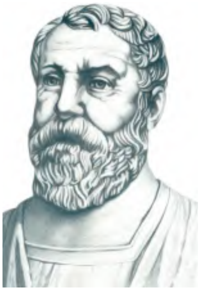
## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**230*.** а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 29 см, 25 см и 6 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 20 см, 15 см, 7 см.

**231*.** Найдите радиус окружности, касающейся сторон треугольника, равных 13 и 15, центр которой лежит на третьей стороне, равной 14.

**232*.** Центр $O$ окружности, вписанной в треугольник $ABC$, соединен с его вершинами отрезками. Площади треугольников, на которые разбивается треугольник $ABC$, равны 7 см$^2$, 15 см$^2$, 20 см$^2$. Найдите стороны треугольника.

***Интересно знать.*** **Герон Александрийский** — один из величайших инженеров античного мира. Многие его изобретения до сих пор вызывают восхищение. Вот только некоторые из них: одометр — механизм для нахождения расстояний на местности, автомат по продаже воды, устройство для автоматического открывания дверей и многое другое.



При помощи **Интернета** выясните, чем еще знаменит математик Герон. Какие треугольники называются *героновыми треугольниками*? Установите при помощи Википедии, почему этого ученого звали Героном Александрийским и мог ли он встречаться с Пифагором.

## Гимнастика ума

Придумайте красивый способ нахождения площади изображенного на рисунке 188 треугольника.

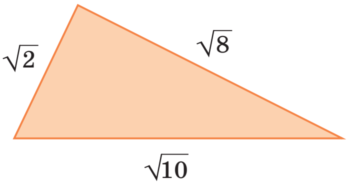



*Рис. 188*

# § 15*. Креативная геометрия

## 1. Примеры решения задач с использованием теоремы синусов и теоремы косинусов

**Задача 1.** *Внутри угла A, равного* 60°, *взята точка M, которая находится на расстоянии* 1 *от одной стороны угла и на расстоянии* 2 *от другой стороны. Найти расстояние от точки M до вершины угла A* (*рис.* 189, *а*).

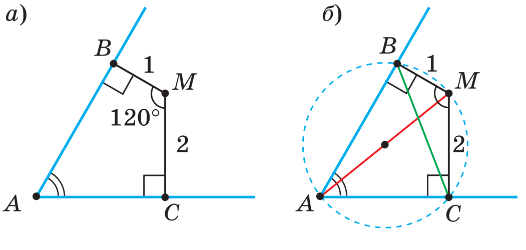



*Рис. 189*

Решение. Пусть $MB \perp AB$, $MC \perp AC$, $MB = 1$, $MC = 2$. Найдем длину отрезка $AM$. Сумма углов четырехугольника $ABMC$ равна 360°. Поэтому $\angle BMC = 120°$.
Так как в четырехугольнике $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180°$, то около него можно описать окружность по признаку вписанного четырехугольника (рис. 189, *б*). Поскольку прямой вписанный угол опирается на диаметр,