

§ 16. Правильные многоугольники

Определение. **Правильным многоугольником** называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

На рисунке 198 изображены правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник. Правильный треугольник — это равносторонний треугольник, а правильный четырехугольник — это квадрат.

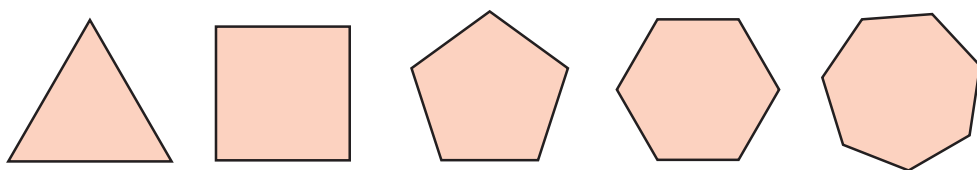


Рис. 198

Одной из простейших задач является задача нахождения величины внутреннего угла правильного многоугольника. Так как все углы правильного n -угольника равны между собой, а сумма углов любого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$, то угол β правильного n -угольника можно найти по формуле

$$\beta = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

Например, для правильного шестиугольника $\beta = \frac{180^\circ \cdot (6 - 2)}{6} = 120^\circ$.

Теорема. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, в любой правильный многоугольник можно вписать окружность; центры этих окружностей совпадают.

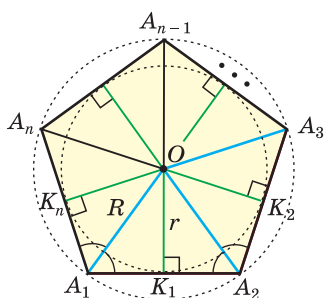


Рис. 199

Доказательство. В правильном многоугольнике $A_1A_2A_3\dots A_n$ проведем биссектрисы внутренних углов A_1 и A_2 . Пусть O — точка пересечения этих биссектрис (рис. 199). Так как $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$ как половины равных углов, то $\triangle A_1OA_2$ — равнобедренный с основанием A_1A_2 . Проведя отрезок OA_3 , получим $\triangle A_2OA_3$, равный $\triangle A_1OA_2$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_2A_3$, сторона OA_2 — общая, $\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$). Соединив точку O отрезками с остальными вершинами, получим множество равных равнобедренных треугольников. Отсюда $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Поэтому окружность

с центром O и радиусом $R = OA_1$ пройдет через все вершины многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, т. е. будет его описанной окружностью. А поскольку высоты указанных равных равнобедренных треугольников, проведенные к их основаниям, равны, т. е. $OK_1 = OK_2 = OK_3 = \dots = OK_n$, то точка O — также и центр вписанной окружности многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, радиус которой $r = OK_1$. Теорема доказана.

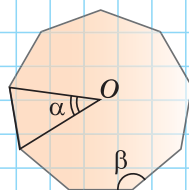
Точка O называется центром правильного n -угольника.

А теперь выполните **Тест 1**.

Тест 1

На рисунке изображен правильный девятиугольник и его центр O . Найдите величину угла α и величину угла β .

а) $36^\circ, 144^\circ$; б) $40^\circ, 120^\circ$; в) $30^\circ, 120^\circ$; г) $40^\circ, 140^\circ$.



Задания к § 16

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 246.** Сумма длин двух сторон правильного шестиугольника равна 20 см. Найдите периметр этого многоугольника.
- 247.** Изобразите правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3\dots A_8$, «отрезав» у квадрата уголки. Отметьте центр O этого многоугольника. Найдите $\angle A_1OA_2$, $\angle A_1A_2O$, $\angle A_1A_2A_3$. В ответе запишите градусную меру $\angle A_1A_2A_3$.
- 248.** Используя формулу суммы углов многоугольника, найдите градусную меру угла правильного n -угольника, если n равно:
 - а) 5; б) 10; в) 18.
- 249.** Внутренний угол правильного n -угольника равен 150° . Найдите число сторон этого n -угольника.
- 250.** Сумма градусных мер двух углов правильного многоугольника равна 324° , а его периметр равен 280 см. Найдите длину стороны этого многоугольника.
- 251.** Дан правильный n -угольник $A_1A_2A_3\dots A_n$, точка O — его центр, $\angle OA_1A_2 = 85^\circ 30'$, $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = 6$ см. Найдите периметр этого n -угольника.
- 252.** Внешний угол правильного n -угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$ равен 60° , периметр — 72 см. Найдите $S_{A_1OA_2}$, где O — центр n -угольника.

253. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 200).

- Найдите углы треугольника $A_1A_2A_3$.
- Найдите углы треугольника $A_1A_3A_5$.
- Докажите, что все диагонали пятиугольника равны.
- Докажите, что диагональ A_1A_3 параллельна стороне A_4A_5 .
- Докажите, что пятиугольник, образованный при пересечении всех диагоналей данного правильного пятиугольника, также является правильным.

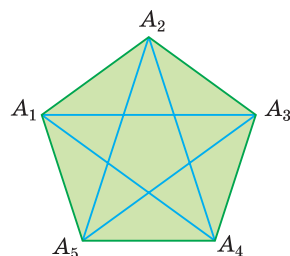


Рис. 200

254. На рисунке 201 изображен правильный восьмиугольник. Найдите величину угла α .

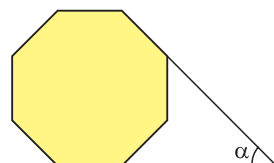


Рис. 201

255. Дан правильный 12-угольник $A_1A_2A_3...A_{12}$. Найдите угол между прямыми:

- A_2A_7 и A_4A_{12} ;
- A_1A_3 и A_6A_{10} .

(Для построения правильного 12-угольника схематически изобразите круглый циферблат часов, разбейте его окружность на 12 равных дуг, отметив точки, соответствующие 1 ч, 2 ч, 3 ч и т. д., и соедините соседние точки отрезками.)

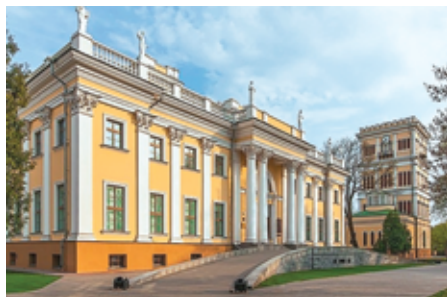
Гимнастика ума



Поверхность футбольного мяча шита из правильных черных 5-угольников и соединяющих их правильных белых 6-угольников.

Задание. Известно, что всего черных 5-угольников 12. Определите математическим путем число белых 6-угольников на поверхности мяча, а затем убедитесь в своей правоте на уроке физкультуры.

(Для самоконтроля. Ответ: число белых 6-угольников на поверхности мяча равно номиналу купюры Республики Беларусь, на лицевой стороне которой размещено изображение Дворца Румянцевых и Паскевичей в г. Гомеле.)



При помощи **Интернета** выясните, в каких странах мира некоторые монеты имеют форму правильного многоугольника.

