# § 17. Формулы радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника

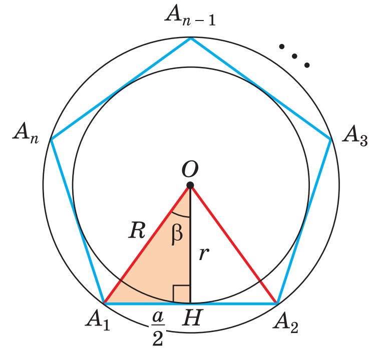


*Рис. 202*

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный $n$-угольник со стороной $a$, где $O$ — его центр, $OA_1 = R$ — радиус описанной окружности, $OH = r$ — радиус вписанной окружности (рис. 202).

Так как $\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n}$, а высота $OH$ равнобедренного треугольника $A_1OA_2$ является биссектрисой и медианой, то угол $\beta = \angle A_1OH = \frac{180°}{n}$, $A_1H = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника $A_1OH$ находим:

а) $\sin\beta = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $a = 2R\sin\beta = 2R\sin\frac{180°}{n}$, $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$;

б) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, откуда $a = 2r\operatorname{tg}\beta = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$.

*Замечание.* Выведенные формулы запоминать не обязательно. Важно помнить способ их получения: решение прямоугольного треугольника $A_1OH$.

**Примеры.** 1) Для правильного треугольника (рис. 203) получим:

$\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{3} = 120°$, $\beta = \angle A_1OH = 60°$, $\sin 60° = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{3}$, или $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$, $a = 2\sqrt{3}r$, или $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

2) Для правильного четырехугольника (рис. 204) получим:

$\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{4} = 90°$, $\beta = \angle A_1OH = 45°$, $\sin 45° = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{2}$, или $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 45° = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot 1 = \frac{a}{2}$, $a = 2r$, или $r = \frac{a}{2}$.

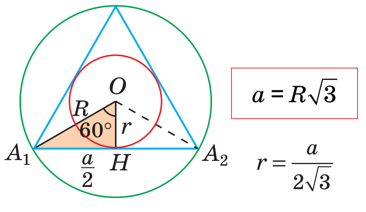


*Рис. 203*

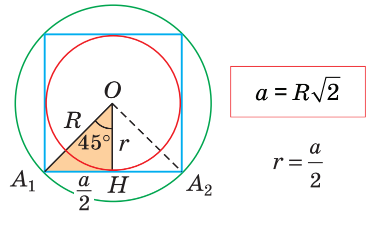


*Рис. 204*

3) Для правильного шестиугольника (рис. 205) $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$, $a = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$, или $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

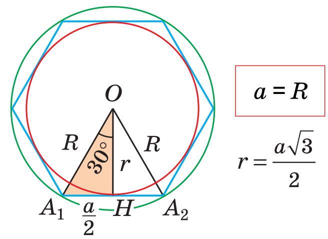


*Рис. 205*

Полезно запомнить формулы, выражающие сторону $a_n$ правильного $n$-угольника через радиус $R$ описанной окружности при $n = 3, 4, 6$:

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R.$$

Для нахождения площади правильного $n$-угольника $A_1A_2A_3...A_n$ с центром $O$ и радиусом $R$ описанной окружности можно найти площадь треугольника $A_1OA_2$ по формуле $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ и умножить ее на число таких треугольников, т. е. на $n$.

**Пример.**

$$S_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{6}\right) = 3R^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$S_8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{8}\right) = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2;$$

$$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{12}\right) = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Для нахождения радиуса $r$ окружности, вписанной в правильный многоугольник, можно использовать формулу площади описанного многоугольника $S = pr$.

## Задания к § 17

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**256.** Дан правильный треугольник. Используя формулы $a = R\sqrt{3}$ и $r = \frac{1}{2}R$, заполните в тетради таблицу, где $a$ — сторона треугольника, $R$ — радиус описанной окружности, $r$ — радиус вписанной окружности.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 6 | | |
| $R$ | | $4\sqrt{3}$ | |
| $r$ | | | 1 |

**257.** а) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный четырехугольник со стороной, равной 8 см.

б) Найдите радиус окружности, описанной около правильного четырехугольника, периметр которого равен 32 см.

**258.** Дан правильный 6-угольник с периметром, равным 30 см. Найдите радиус описанной и радиус вписанной окружности этого 6-угольника.

**259.** а) Вычислите радиус описанной окружности правильного 10-угольника со стороной, равной 6 см. Ответ округлите до 0,1 см.
б) Вычислите радиус вписанной окружности правильного 12-угольника со стороной, равной 24 см. Ответ округлите до 0,1 см.

**260.** Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центром $O$ и стороной $a = 20$ (рис. 206). Найдите угол $\beta$ и выразите радиусы его описанной и вписанной окружностей через $a$ и $\beta$.

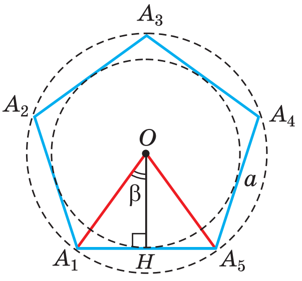

*Рис. 206*

**261.** а) Выразите сторону $a$ правильного 9-угольника через радиус $R$ его описанной окружности.
б) Выразите радиус $r$ окружности, вписанной в правильный 18-угольник, через его сторону $a$.

**262.** Найдите площадь правильного 12-угольника, у которого радиус описанной окружности равен 6 см.

## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**263*.** Дан правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3...A_8$ (рис. 207).
а) Докажите, что $A_2A_5 \parallel A_3A_4$.
б) Докажите, что $A_1A_2A_5A_6$ — прямоугольник.
в) Докажите, что диагональ $A_1A_5$ проходит через центр многоугольника.
г) Найдите углы треугольника $A_1A_2A_5$.
д) Докажите, что площадь прямоугольника $A_1A_2A_5A_6$ равна $\frac{1}{2}$ площади данного правильного восьмиугольника.

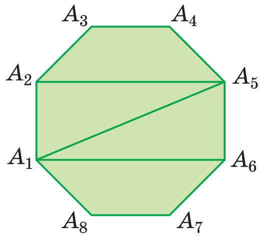

*Рис. 207*

### *Гимнастика ума*

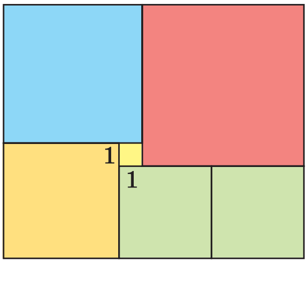

*Рис. 208*

Прямоугольник на рисунке 208 составлен из шести квадратов. Сторона желтого квадрата равна 1. Найдите длину стороны красного квадрата.

(Для самоконтроля. Ответ: длина стороны красного квадрата равна числу периодов в таблице Менделеева.)

При помощи **Интернета** выясните, какую теорему относительно правильных многоугольников доказал великий математик Карл Гаусс и какую геометрическую фигуру он завещал после смерти изобразить на своем памятнике.

## § 18. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник

### 1. Правильный треугольник

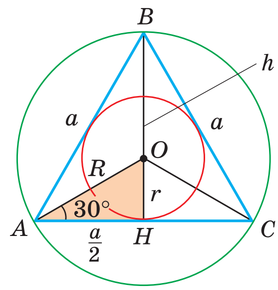


*Рис. 209*

Обобщим информацию о правильном (равностороннем) треугольнике.

Запишем формулы высоты $h$, площади $S$, радиуса $R$ описанной и радиуса $r$ вписанной окружностей правильного треугольника $ABC$ со стороной $a$ (рис. 209):

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Из $\triangle AOH$, где $\angle OAH = 30°$, следует, что $r = \frac{1}{2}R$.

При заданной стороне $a$ правильного треугольника его можно построить при помощи циркуля и линейки, используя алгоритм построения треугольника по трем сторонам.

Так как $BO : OH = 2 : 1$, то $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. Для построения описанной и вписанной оружностей правильного треугольника достаточно построить его медианы (высоты), точка пересечения которых будет центром искомых окружностей.

### 2. Правильный четырехугольник

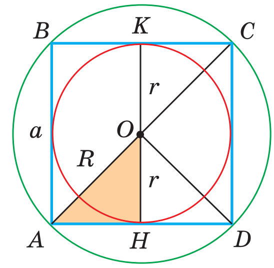


*Рис. 210*

Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна $a$, $R$ — радиус описанной, $r$ — радиус вписанной окружности (рис. 210). Диаметр его описанной окружности равен диагонали $AC$. В свою очередь, $AC = a\sqrt{2}$, откуда $2R = a\sqrt{2}$, или $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника $AOD$ также следует, что $AD = AO\sqrt{2}$, $a = R\sqrt{2}$. Диаметр $KH$ окружности,