§ 19. Нахождение длины окружности и площади круга

1. Длина окружности и площадь круга

Длину окружности, сделанной из гибкой проволоки, можно измерить, если проволоку распрямить в отрезок. Еще древние заметили, что отношение длины любой окружности к ее диаметру есть величина постоянная: длина окружности примерно в 3 раза больше диаметра. Вы можете убедиться в этом при помощи нитки и линейки, используя в качестве окружности верхнюю кромку чашки (рис. 224).

Рис. 224

Понятно, что периметр правильного многоугольника, вписанного в окружность, будет стремиться к длине окружности при неограниченном увеличении числа его сторон, а площадь этого многоугольника — к площади круга, ограниченного данной окружностью (рис. 225).

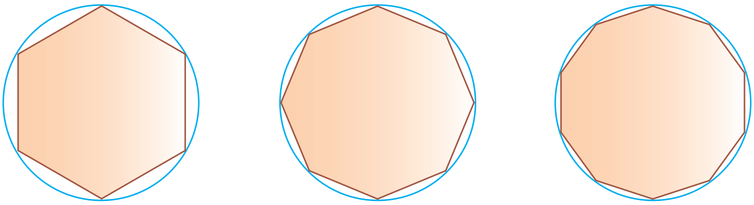


Рис. 225

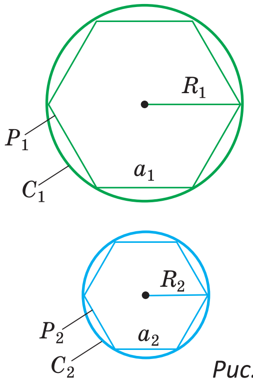


Рис. 226

Используя этот факт, выведем уже известные вам формулы длины окружности $C = 2\pi R$ и площади круга $S = \pi R^2$, где R — радиус окружности и круга.

Вначале покажем, что отношение длины любой окружности C к ее диаметру $D = 2R$ есть величина постоянная. Для этого рассмотрим две окружности и два правильных вписанных в них многоугольника с одинаковым числом сторон n, где a_1 — сторона первого, a_2 — сторона второго многоугольника, P_1 и P_2 — их соответствующие периметры, C_1 — длина первой, а C_2 — длина второй описанной окружности (рис. 226).

Найдем отношение указанных периметров:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\overset{1}{\cancel{n}} \cdot a_1}{\underset{1}{\cancel{n}} \cdot a_2} = \frac{2R_1 \sin \overset{1}{\cancel{\frac{180^\circ}{n}}}}{2R_2 \sin \underset{1}{\cancel{\frac{180^\circ}{n}}}} = \frac{2R_1}{2R_2}.$$

При неограниченном увеличении числа n периметр P_1 устремится к C_1, периметр P_2 — к C_2, а отношение $\frac{P_1}{P_2}$ — к отношению $\frac{C_1}{C_2}$, и тогда $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Отсюда следует, что отношение длины окружности к ее диаметру, т. е. $\frac{C}{2R}$ — величина постоянная для любой окружности.

Это отношение обозначается буквой π. Так как $\frac{C}{2R} = \pi$, то длина окружности $C = 2\pi R$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. **Длина окружности радиуса *R* находится по формуле**

$$C = 2\pi R.$$

Интересно знать. Число $\pi \approx 3{,}1415...$ — иррациональное и в десятичном виде представляет собой бесконечную непериодическую дробь. Оно было известно уже древним грекам. Еще Архимед нашел дробь $\frac{22}{7}$, довольно точно приближающую число π. Мы же для приближенных вычислений будем пользоваться в основном значением $\pi \approx 3{,}14$.

А теперь выведем формулу площади круга.

Теорема. **Площадь круга радиуса *R* находится по формуле**

$$S = \pi R^2.$$

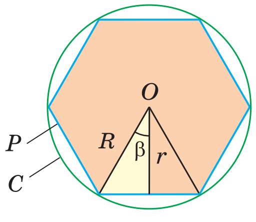


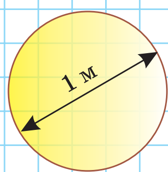
Рис. 227

Доказательство. Рассмотрим некоторую окружность радиуса R и вписанный в нее правильный n-угольник (рис. 227), площадь которого $S_n = pr = \frac{1}{2}Pr$, где P — его периметр, r — радиус вписанной окружности. При неограниченном увеличении числа n площадь S_n правильного n-угольника устремится к площади $S_{кр}$ круга радиуса R, периметр P — к длине C описанной окружности, а радиус r — к радиусу R (поскольку угол β устремится к нулю). Тогда $\frac{1}{2}Pr$ устремится к $\frac{1}{2}CR$, то есть к $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot R \cdot R$, что равно πR^2, откуда $S_{кр} = \pi R^2$.
Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

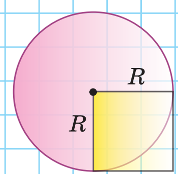
Тест 1

Диаметр круглого бревна 1 м. Хватит ли веревки длиной 3 м, чтобы обвязать бревно?



Тест 2

Что больше: площадь круга или площадь трех желтых квадратов со стороной, равной радиусу?



2. Длина дуги окружности и площадь сектора круга

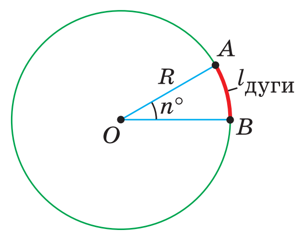


Рис. 228

Поскольку длина окружности $C = 2\pi R$, а ее градусная мера равна $360°$, то длина дуги, содержащей $1°$, равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тогда длина l дуги, содержащей $n°$ (рис. 228), равна $\frac{\pi R}{180} \cdot n$.

Напомним, что *сектором* называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, соединяющей концы радиусов (рис. 229). Радиус круга называется *радиусом сектора*, указанная дуга — *дугой сектора*, центральный угол между радиусами, ограничивающими сектор, — *углом сектора*.

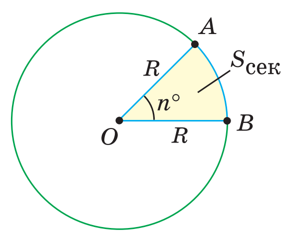


Рис. 229

Так как площадь круга $S = \pi R^2$, то площадь сектора с углом в $1°$ равна $\frac{\pi R^2}{360}$, а с углом в $n°$ градусов — $\frac{\pi R^2}{360} \cdot n$.

Заметим, что $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi R}{180} \cdot n\right) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot R$, т. е. площадь сектора равна половине произведения длины дуги сектора на его радиус.

Пример 1. Пусть дана дуга окружности с радиусом 9 см, содержащая $30°$ (рис. 230, *a*). Найдем длину дуги:

$$l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180} \cdot n = \frac{\pi \cdot 9}{180} \cdot 30 = 1{,}5\pi \approx 1{,}5 \cdot 3{,}14 \approx 4{,}7 \text{ (см)}.$$

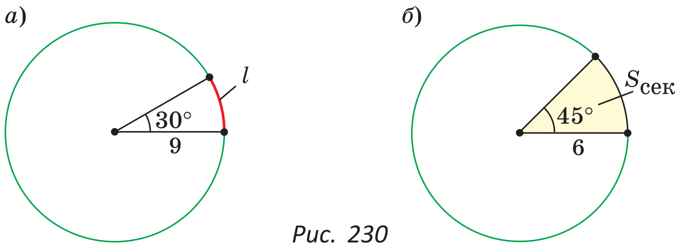


Рис. 230

Пример 2. Пусть угол сектора содержит 45°, а радиус равен 6 см (рис. 230, *б*). Найдем площадь сектора:

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 45 = 4{,}5 \cdot \pi \approx 4{,}5 \cdot 3{,}14 \approx 14{,}1 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Замечание. При вычислении длины дуги (площади сектора) допустимы обе следующие записи: $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$ и $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180°} \cdot n°$ ($S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ и $S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$).

Длина дуги и площадь сектора прямо пропорциональны градусной мере дуги и угла сектора. Поэтому длина дуги так относится к длине окружности, как градусная мера дуги относится к градусной мере окружности. Площадь сектора так относится к площади круга, как градусная мера угла сектора относится к градусной мере полного угла, т. е. справедливы пропорции:

$$\boxed{\frac{l_{дуги}}{C} = \frac{n°}{360°},} \quad \boxed{\frac{S_{сек}}{S_{кр}} = \frac{n°}{360°},} \quad \boxed{\frac{l_{дуги}}{C} = \frac{S_{сек}}{S_{кр}}.}$$

Замечание. В третьей пропорции $l_{дуги}$ — это длина дуги сектора.

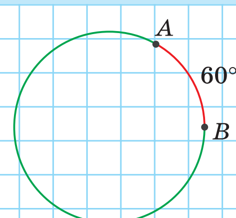
Данные пропорции также позволяют находить длину дуги и площадь сектора. Так, если длина окружности равна 10 см, а градусная мера ее дуги $n° = 120°$, то $\frac{l_{дуги}}{10} = \frac{120°}{360°}$, откуда длина данной дуги $l_{дуги} = \frac{10 \cdot 120°}{360°} = 3\frac{1}{3}$ (см).

А если площадь круга равна 12 см^2 и угол сектора равен 80°, то $\frac{S_{сек}}{12} = \frac{80°}{360°}$, откуда площадь данного сектора $S_{сек} = \frac{12 \cdot 80°}{360°} = 2\frac{2}{3}$ (см^2).

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

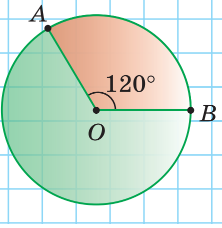
Тест 3

Длина окружности равна 24 см. Найдите длину дуги AB, содержащей 60°.



Тест 4

Площадь круга равна 60 см². Найдите площадь сектора AOB, угол которого равен $120°$.



Задания к § 19

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
ключевые задачи

Задача 1. *Дан сектор* AOB (рис. 231), *радиус которого равен* 6, *а площадь —* 3π. *Найти длину дуги этого сектора. Ответ округлить до* 0,1.

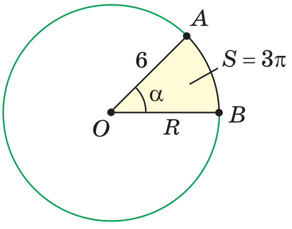


Рис. 231

Решение. *Способ* 1. Пусть $\angle AOB = \alpha$, откуда $S_{\text{сек}} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha$. Так как по условию $S_{\text{сек}} = 3\pi$, то $3\pi = \dfrac{\pi \cdot 6^2}{360°} \cdot \alpha$, откуда $\alpha = 30°$. Найдем длину дуги AB: $\cup AB = \dfrac{\pi R}{180°} \cdot \alpha = \dfrac{\pi \cdot 6}{180°} \cdot 30° = \pi \approx 3{,}1$.

Способ 2. Воспользуемся пропорцией $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{C} = \dfrac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}$. Тогда $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \dfrac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2}$, $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{2} = \dfrac{S_{\text{сек}}}{R}$, $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{2} = \dfrac{3\pi}{6}$, $l_{\text{дуги}} = \pi \approx 3{,}1$.

Способ 3. Так как $S_{\text{сек}} = \dfrac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot R$, то $3\pi = \dfrac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot 6$, $l_{\text{дуги}} = \pi \approx 3{,}1$.

Ответ: 3,1.

Задача 2. *Найти площадь сегмента круга, радиус которого равен* 12, *если градусная мера дуги этого сегмента равна* $120°$.

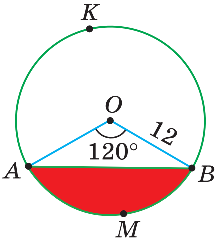


Рис. 232

Решение. Напомним, что *сегментом* называется часть круга, ограниченная хордой и дугой окружности, которая соединяет концы этой хорды.

Пусть O — центр данной окружности, $\cup AMB = 120°$ (рис. 232). Тогда $\angle AOB = 120°$, $OA = OB = 12$ см. Площадь сегмента AMB равна разности площади сектора $AOBM$ и площади равнобедренного треугольника AOB.

Так как площадь сектора $AOBM$ $S_{AOBM} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot 120° =$

$= \dfrac{\pi \cdot 12^2}{3} = 48\pi$, а площадь треугольника AOB $S_{AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$, то площадь сегмента AMB $S_{AMB} = 48\pi - 36\sqrt{3}$.

Ответ: $48\pi - 36\sqrt{3}$.

Замечание. Площадь сегмента AKB (см. рис. 232) можно найти как сумму площадей сектора $OAKB$ и треугольника AOB, либо как разность площади круга и площади сегмента AMB.

Гимнастика ума

Фрагмент пазла представляет собой прямоугольник размером 30 × 50 (мм), в котором на противоположных сторонах есть два полукруглых выреза и на двух других сторонах — два выступа в виде полукругов. Вырезы и выступы имеют одинаковый диаметр 12 мм (рис. 233). Найдите площадь этого фрагмента пазла в квадратных сантиметрах.

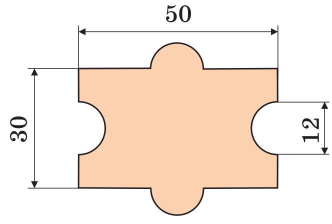


Рис. 233

Реальная геометрия

Из квадратного листа металла необходимо вырезать 4 одинаковых круга наибольшего диаметра (рис. 234). Определите, сколько процентов составят отходы.

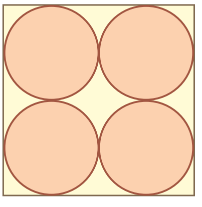


Рис. 234

Интересно знать. В 1987 г. был учрежден неофициальный праздник — день числа π, который отмечают любители математики 14 марта (3-й месяц, 14-е число).

Долгое время математики старались найти как можно большее число знаков числа π после запятой. Легко запомнить двенадцать первых знаков числа $\pi \approx 3{,}14159265358\ldots$ при помощи следующей считалки: «*Это я знаю и помню прекрасно, но многие цифры мне лишни, напрасны*», — в которой количество букв в каждом слове означает очередную цифру числа π: «это» — 3, «я» — 1, «знаю» — 4 и т. д.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

275. Найдите приближенно длину окружности, если ее радиус равен: а) 10 см; б) 1,5 дм; в) 0,05 м; г) $3\frac{1}{2}$ км.

(При вычислениях возьмите $\pi \approx 3{,}14$.)

276. Найдите, округлив до целых, радиус окружности, если ее длина равна: а) 60 см; б) 300 мм; в) 6,28 дм; г) 1 м.

277. Длина окружности равна 600 см. Найдите длину ее дуги, содержащей:
а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 24°.

278. Длина дуги окружности равна 12 см. Вычислите радиус окружности (округлив результат до 0,1 см), если градусная мера дуги составляет:
а) 45°; б) 120°.

279. Найдите градусную меру дуги (округлив ответ до 1°), если даны ее радиус R и длина l:
а) $R = 10$ см, $l = 15$ см; б) $R = 36$ м, $l = 12$ м.

280. Вычислите приближенно градусную меру дуги, длина которой равна радиусу окружности. Ответ округлите до 1°.

281. Длина окружности больше ее диаметра на 12 см. Найдите приближенно радиус окружности. Результат округлите до 0,1 см.

282. Радиус закругления железнодорожного полотна (рис. 235) равен 1800 м, длина дуги закругления равна 900 м. Найдите, сколько примерно градусов содержит дуга закругления (при расчетах возьмите $\pi \approx 3$).

Рис. 235

283. а) Определите, на сколько увеличится длина C окружности, если ее радиус R увеличить на 1 см.
б) Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить в 2 раза?

284. Дуга AB окружности содержит 120°. Через ее точки A и B проведены касательные AC и BC (рис. 236). Докажите, что длина окружности, касающейся данной окружности и прямых AC и BC, равна длине дуги AB.

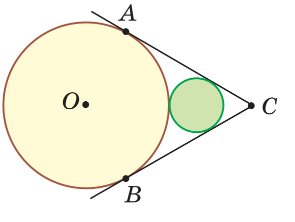


Рис. 236

285. Найдите приближенно площадь круга, взяв $\pi \approx 3{,}14$, если радиус круга равен:
а) 5 см; б) 10 м; в) 2,5 дм; г) 1 км.

286. Найдите приближенно радиус круга (округлив ответ до 0,1), если площадь круга равна:
а) 4 см^2; б) 314 дм^2.

287. Площадь крышки люка равна 0,5 м^2. Найдите диаметр люка. Ответ запишите в сантиметрах.

288. а) Вычислите площадь круга, если длина его окружности равна 6,28 см. Ответ округлите до 0,01 см^2.
б) Вычислите длину окружности, если площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна 15 см^2. Ответ округлите до 0,01 см.

289. а) Найдите площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с радиусами $R = 8$ см и $r = 5$ см.

б) Дано кольцо (рис. 237). Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности и равна 8 см. Найдите площадь кольца.

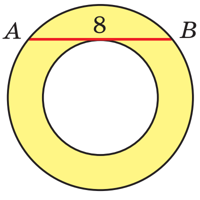


Рис. 237

290. В окружность вписан квадрат, в этот квадрат вписана окружность. Найдите отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

291. Площадь круга равна Q. Найдите площадь сектора с дугой, содержащей:

а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 270°.

292. а) На рисунке 238, *а*) площадь закрашенного сектора относится к площади круга как 2 : 9. Найдите градусную меру угла сектора.
б) На рисунке 238, *б*) площадь круга составляет 120 см^2. Найдите площадь закрашенного сектора.
в) На рисунке 238, *в*) дуги EG и KP содержат 60° и 120° соответственно, площадь незакрашенного сектора EOG равна 90 см^2. Найдите сумму площадей закрашенных секторов KOE и POG.

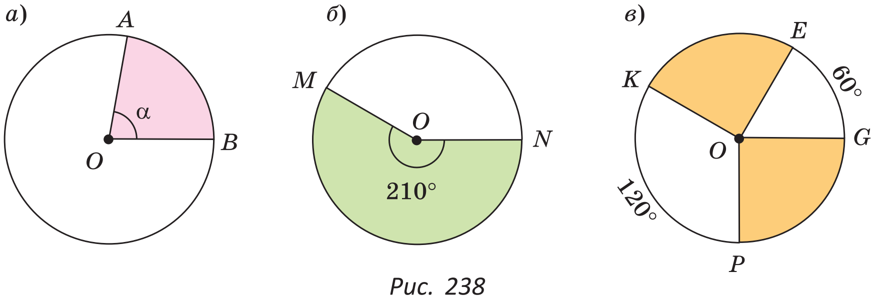


Рис. 238

293. На рисунке 239 изображена круговая диаграмма. Найдите площадь сектора, составляющего 40 %, если радиус круга равен 10 см.

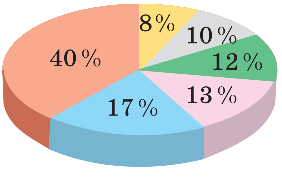


Рис. 239

294. Найдите отношение площадей вписанного и описанного кругов:

а) для правильного треугольника;
б) для правильного шестиугольника.

295. Найдите площадь сектора круга с углом α и радиусом R, если:

а) $R = 4$ см, $\alpha = 15°$;
б) $R = 2$ м, $\alpha = 135°$.

296. а) Вычислите радиус сектора, если его площадь равна 16π, а дуга сектора содержит $40°$.
б) Вычислите площадь сектора, если площадь круга равна 256π, а длина дуги этого сектора равна 4π.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

297*. Из тонкого металлического круга вырезали правильный треугольник наибольшей площади. Определите, сколько процентов составили отходы. Ответ округлите до 1 %.

298*. Определите площадь сегмента окружности радиуса R с дугой, равной α градусов, если:

а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 270°$.

299*. Из концов дуги AB к окружности, радиус которой равен R, проведены касательные, которые пересекаются в точке D. Определите площадь фигуры, заключенной между этими касательными и дугой, если градусная мера дуги AB равна:

а) $90°$; б) $120°$.

300*. а) Дан правильный треугольник со стороной, равной 2. Построены три сектора с центрами в вершинах треугольника и радиусами, равными 1 (рис. 240). Найдите площадь желтой части треугольника.
б) Дан сектор с углом $90°$ и радиусом, равным 4 (рис. 241). На его радиусах построены полукруги. Найдите площадь красной части сектора.

301*. На рисунке 242 изображены три круга равного радиуса площадью 12 см^2 каждый, центры которых находятся в вершинах произвольного треугольника. Найдите сумму площадей трех закрашенных секторов этих кругов.

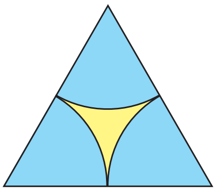


Рис. 240

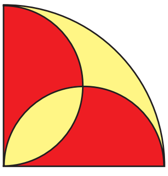


Рис. 241

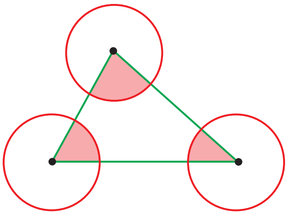


Рис. 242

302*. Два круга радиуса R каждый расположены на плоскости так, что окружность одного проходит через центр другого. Определите площадь общей части кругов.

303*. Дан круг радиуса 1 и вписанный угол ABC, равный $60°$ (рис. 243). Найдите наибольшее значение площади закрашенной фигуры.

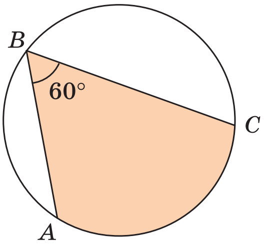
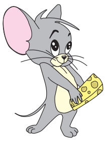


Рис. 243

При помощи **Интернета** выясните, почему фразеологизм «квадратура круга» означает «неразрешимую задачу».

Гимнастика ума

Допустим, что земной шар вдоль экватора (длина экватора примерно 40 000 км) обтянули нитью. Затем эту нить удлинили на 20 см и равномерно (на одинаковом расстоянии от поверхности Земли) расположили по окружности над экватором (рис. 244). Сможет ли в полученный зазор между нитью и поверхностью Земли пролезть мышка?



Найдите размер этого зазора.

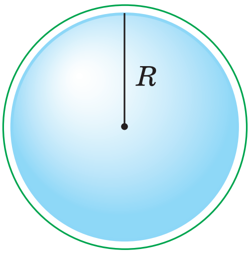


Рис. 244

Реальная геометрия

Пицца диаметром 30 см стоит 30 р. Сколько должна стоить пицца того же вида диаметром 20 см (рис. 245)? Подсказка: ответ 20 р. неверный.

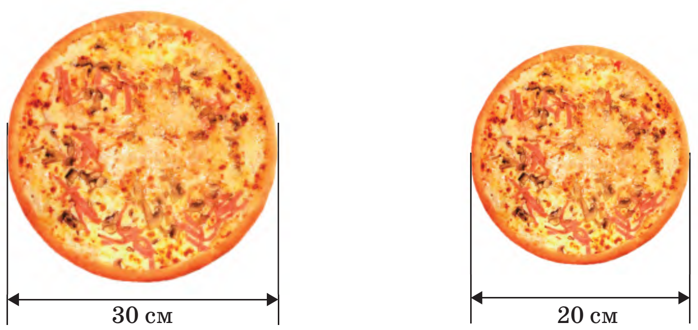
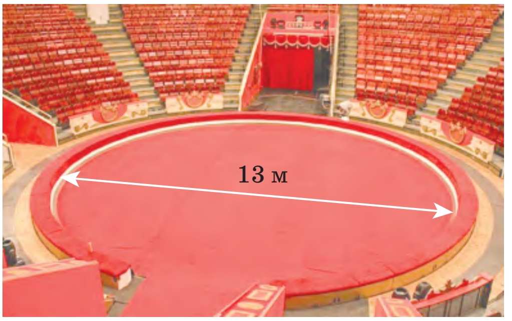


Рис. 245

Интересно знать. Белорусский государственный цирк находится на проспекте Независимости в Минске. Первое представление в нем состоялось в 1959 г. Минский цирк вмещает 1625 зрителей. Диаметр цирковой арены (манежа) равен 13 м, как и во всех цирках мира.

С помощью **Интернета** выясните, как цирк связан с геометрией. В частности, что общего у слов «цирк» и «циркуль»? Почему диаметр манежа равен именно 13 м?



Задание. а) Определите длину окружности манежа. Подсчитайте, за сколько секунд обезьянка может обежать манеж по окружности со скоростью 10 км/ч.

б) Определите площадь арены в квадратных метрах. Выясните, сколько ведер опилок понадобится, чтобы засыпать манеж, если одним ведром можно засыпать 9 дм^2.

Геометрия 3D

Напомним, что в 8-м классе мы рассмотрели два тела вращения: цилиндр и конус. На рисунках 246 и 247 изображены эти тела и развертки их поверхности на плоскость.

Выполните задания 1 и 2, связанные с этими пространственными фигурами.

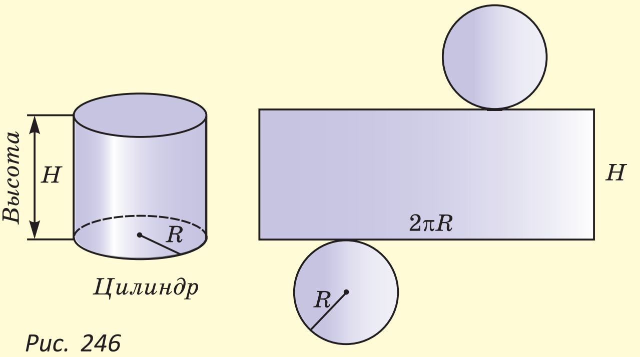


Рис. 246

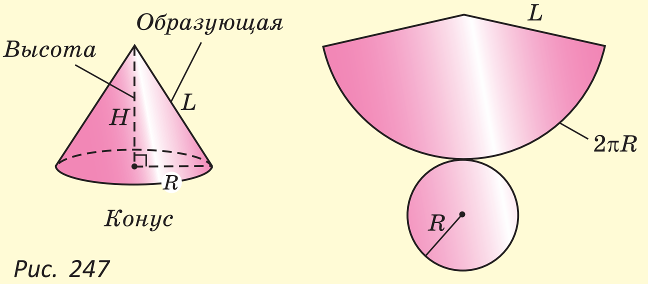


Рис. 247

Задание 1. Найдите площадь поверхности цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания — 4 см. Значение π возьмите равным 3.

Задание 2. Найдите площадь поверхности конуса, высота которого равна 4 см, а радиус основания — 3 см. Значение π возьмите равным 3.

Задание 3. Шар называется вписанным в конус, если он касается основания конуса в его центре и боковой поверхности по некоторой окружности (рис. 248). Центр шара при этом лежит на высоте конуса. Если провести плоскость через высоту конуса, то в сечении конуса получится равнобедренный треугольник, а в сечении вписанного шара — его большой круг, вписанный в указанный равнобедренный треугольник. Найдите радиус шара, вписанного в конус с радиусом основания, равным 6 см, и высотой, равной 4 см.

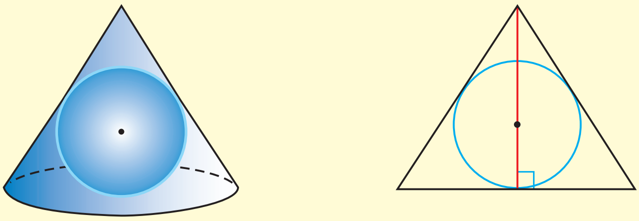


Рис. 248

ПОДВОДИМ ИТОГИ

Знаем

1. Формулу длины окружности.
2. Формулу площади круга.
3. Алгоритм нахождения длины дуги.
4. Алгоритм нахождения площади сектора.
5. Алгоритм нахождения площади сегмента.

Умеем

1. Находить длину окружности по ее радиусу.
2. Находить площадь круга по его радиусу.
3. Определять длину дуги окружности по радиусу и градусной мере дуги.
4. Определять площадь сектора по его радиусу и углу.
5. Определять площадь сегмента по радиусу окружности и градусной мере дуги сегмента.
6. Выводить формулу длины окружности.
7. Выводить формулу площади круга.

§ 20*. Креативная геометрия

1. Луночки Гиппократа

Луночками Гиппократа называют серповидные фигуры, ограниченные дугами двух окружностей.

Задача 1. *На отрезках AB, AM и MB построены полукруги с центрами в точках* O, O_1 *и* O_2. $NM \perp AB$, $NM = 10$ (рис. 249). *Найти площадь закрашенной части большого полукруга.*

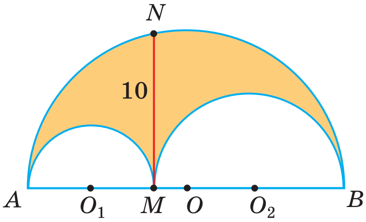


Рис. 249

Решение. Площадь закрашенной фигуры равна разности площадей полукруга с диаметром $AB = 2R$ и двух полукругов с диаметрами $AM = 2R_1$ и $MB = 2R_2$, т. е.

$$S_{ANBM} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot R_1^2}{2} + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left((2R)^2 - \left((2R_1)^2 + (2R_2)^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - \left(AM^2 + MB^2\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left((AM + MB)^2 - \left(AM^2 + MB^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot 2AM \cdot MB = \frac{\pi}{4} \cdot AM \cdot MB.$$

Так как $\angle ANB = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AB, то NM — высота прямоугольного треугольника ANB, проведенная к гипотенузе. А высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, это среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е. $MN^2 = AM \cdot MB$. Следовательно, $S_{ANBM} = \frac{\pi}{4} \cdot MN^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 25\pi$.
Ответ: 25π.

При помощи **Интернета** выясните, один ли и тот же человек сформулировал клятву Гиппократа и исследовал гиппократовы луночки.

РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

304. На сторонах прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены полукруги (рис. 250, *а*). Докажите, что $S_1 + S_2 = S_3$.

305. На сторонах прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены полукруги (рис. 250, *б*). Найдите сумму площадей луночек Гиппократа $S_1 + S_2$, если $AC = 12$, $BC = 5$.

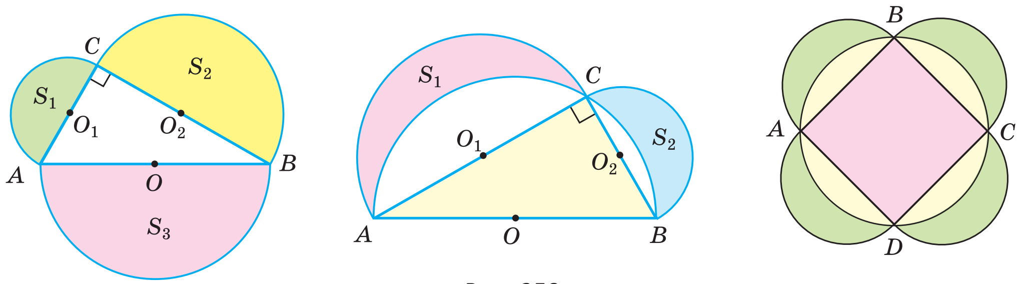


Рис. 250

306. Около квадрата $ABCD$ описан круг, а на его сторонах построены полукруги как на диаметрах (рис. 250, *в*). Докажите, что сумма площадей зеленых луночек равна площади квадрата.

2. Золотое сечение

«Золотое сечение», или «божественная пропорция», — так называют математики деление отрезка некоторой точкой на части так, что больший из полученных отрезков является средним пропорциональным (средним геометрическим) между меньшим отрезком и целым. Другими словами, больший отрезок должен так относиться к меньшему, как целый отрезок относится к большему. Если на отрезке AB отмечена точка M и $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$, то отрезок AM — среднее пропорциональное отрезков AB и MB. Поэтому точка M делит отрезок AB в отношении золотого сечения.

Пусть $AB = 1$, $AM = x$, $MB = 1 - x$ (рис. 251).

Тогда $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, откуда $x^2 + x - 1 = 0$. Учитывая, что $x > 0$, получим $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx$ $\approx 0{,}618033989...$

Рис. 251

Таким образом, больший отрезок AM составляет приблизительно 62 %, а меньший отрезок MB — приблизительно 38 % всего отрезка AB.

Число $\Phi = \frac{1}{x} \approx 1{,}618033989...$ — считается отношением золотого сечения. Оно примерно равно отношению 8 : 5 (рис. 252).

Золотое сечение обладает определенной гармонией, которую человек находит прекрасной. Многие художественные, музыкальные, поэтические произведения, шедевры архитектуры содержат в своей структуре золотое сечение. Опытным путем установлено, что оптимальным человеку кажется прямоугольник, длина и ширина которого находятся в отношении золотого сечения. Физиологи объясняют это тем, что поле зрения человека, т. е. та часть окружающего мира, которую видит

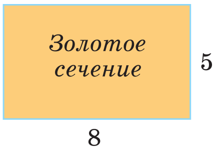


Рис. 252

человек, представляет собой прямоугольник со сторонами, находящимися в отношении золотого сечения.

Известно, например, что в знаменитой скульптуре Венеры Милосской (рис. 253) — эталоне женской красоты — талия делит фигуру в отношении золотого сечения.

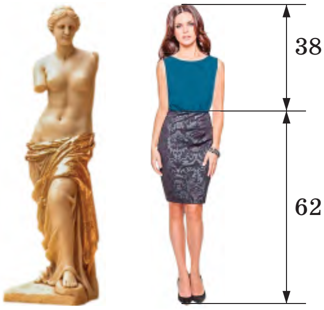


Рис. 253

Примечателен один *исторический факт*. Когда информация о Венере Милосской и золотом сечении была опубликована в одном из популярных журналов начала XX в., то в магазинах поблизости женских гимназий вдруг исчезли портняжные метры. Их раскупили девушки гимназистки, чтобы проверить, насколько их фигура близка к идеалу и какой высоты каблук следует носить, чтобы к нему приблизиться.

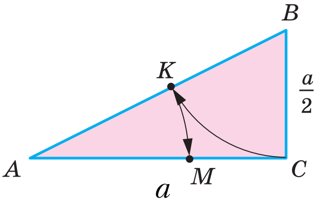


Рис. 254

Покажем способ деления отрезка в отношении золотого сечения при помощи циркуля и линейки. Пусть дан отрезок, равный a. Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = a$ и $BC = \frac{a}{2}$ (рис. 254). На гипотенузе AB отложим отрезок BK, равный отрезку BC. Затем на катете AC отложим отрезок AM, равный отрезку AK. Точка M делит отрезок AC в отношении золотого сечения, т. е. $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

3. Построение правильного пятиугольника

С давних времен построению правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки математики уделяли большое внимание. Древние греки умели строить правильные треугольники, четырехугольники, пятиугольники, а также правильные многоугольники, получаемые удвоением числа их сторон: 6-угольники, 8-угольники, 10-угольники и т. д. Далее дело зашло в тупик: они не могли найти способ построения правильных 7-угольников, 9-угольников, 11-угольников. И только 2000 лет спустя великий немецкий математик XVII в. Карл Гаусс решил эту математическую проблему. Будучи 19-летним юношей, он доказал, что можно построить правильный 17-угольник, а вот 7-угольник, 9-угольник, 11-угольник, 13-угольник циркулем и линейкой построить нельзя. Задача о построении правильного 17-угольника была его первым научным открытием. Несмотря на выдающиеся достижения Гаусса в области математики, этой первой своей решенной проблеме он придавал такое значение, что в конце жизни завещал изобразить на могильном камне правильный 17-угольник.

Рассмотрим правильный пятиугольник. Если в нем провести все диагонали (рис. 255), то получится звезда (звездчатый пятиугольник). Звезда была символом школы Пифагора. Замечательно то, что точки пересечения диагоналей пятиугольника делят их в отношении золотого сечения: $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Докажем это.

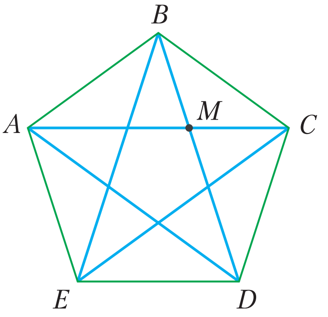


Рис. 255

Так как $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ — равные равнобедренные треугольники (рис. 256), то $\angle BAC = \angle ACB = \angle DBC$. Поскольку $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE$ (докажите самостоятельно), то $AMDE$ — параллелограмм, поэтому $AM = ED = x$. Но $BC = ED = x$ как стороны пятиугольника. Из подобия треугольников ABC и BMC (по двум углам) следует $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$, или $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{MC}$. Следовательно, точка M делит отрезок AC в отношении золотого сечения.

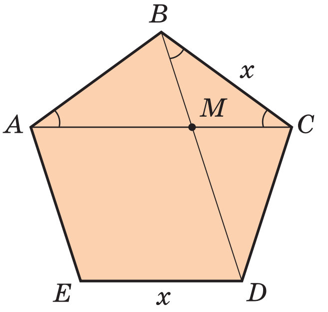


Рис. 256

Рассмотрим задачу о построении правильного пятиугольника при помощи циркуля и линейки. Для построения правильного пятиугольника можно взять произвольный отрезок d, равный диагонали правильного пятиугольника, и разделить его в отношении золотого сечения. Получив отрезок x, который равен стороне правильного пятиугольника, можно легко построить правильный пятиугольник. Продолжите построение сами.

Задача о построении правильного пятиугольника равносильна построению углов, равных 36°, 72°, 108°, а также построению равнобедренного треугольника, биссектриса угла при основании которого разбивает данный треугольник на два равнобедренных. Пусть в треугольнике ABC (рис. 257) $\angle B = 36°$, AK — биссектриса и $AB = BC = 1$. Обозначим $AC = AK = KB = x$, $KC = 1 - x$. Из свойства биссектрисы вытекает $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, откуда $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, точка K делит отрезок BC в отношении золотого сечения. Из треугольника ABC по теореме косинусов

$$\cos 36° = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{2 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

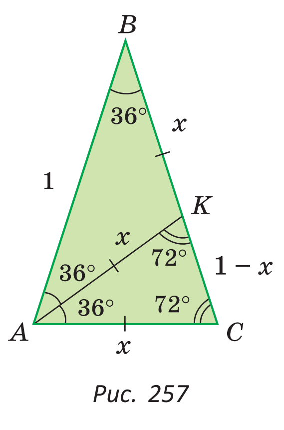


Рис. 257